Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет бизнеса

Кафедра Экономической информатики

# ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Рабочая программа,
задания к
расчетно-графическим и лабораторным работам,
методические указания к выполнению лабораторных работ
по курсу
«Прикладные методы оптимизации»
для студентов II курса факультета бизнеса (направление 080800)

Новосибирск
2007

Составители:
*Веселовская С.О.*, канд. техн. наук, доц.,
*Кириллов Ю.В.*, канд. техн. наук, доц.

Рецензенты:
*Мезенцев Ю.А.*., канд. экон. наук, доц.,
*Наумов А.А.*, канд. техн. наук, доц.

Работа подготовлена на кафедре Экономической Информатики НГТУ.

Задания к расчетно-графическим и лабораторным работам соответствуют учебной программе курса «Прикладные методы оптимизации».

Разработка содержит 25 вариантов заданий к расчетно-графическим работам. Каждое задание включает в себя 5 задач, охватывающие темы «Линейное программирование», «Целочисленное линейное программирование», «Дискретное программирование» и «Динамическое программирование».

Лабораторный практикум тематически и содержательно связан с расчетно-графическими работами и включает в себя 4 лабораторные работы, посвященные углубленному изучению материала. Для выполнения лабораторных работ на компьютере используются средства ППП «ПЭР» (Пакет экономических расчетов), а также специализированной программы для решения задачи о назначениях венгерским методом Venger.

*СОДЕРЖАНИЕ:*

## 1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА учебной дисциплины

## Прикладные методы оптимизации

ООП 080800 – «Прикладная информатика (бакалавриат)».

Факультет бизнеса

Курс – 2, семестр – 4

Лекции – 17 часов

Практические занятия – 17 часов

Лабораторные работы – 17 часов

Курсовой проект – 4 семестр

Самостоятельная работа – 34 часа

Зачет – 4 семестр

Всего – 85 часов

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта (ГОС) высшего профессионального образования по направлению 080800 «Прикладная информатика (бакалавриат)».

Регистрационный номер и дата утверждения ГОС – приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 659 тум/бак от 02 августа 2004 г.

Дисциплина входит в цикл общепрофессиональных дисциплин, устанавливаемых вузом (ОПД.Ф) на основании требований ГОС подготовки бакалавров по направлению 080800 «Прикладная информатика». Шифр дисциплины в ГОС ОПД.Ф.12.

## 1.1. Внешние требования

Программа курса «Прикладные методы оптимизации» соответствует ГОС для студентов, обучающихся по направлению 080800 «Прикладная информатика».

Требования ГОС к квалификации выпускника по данному направлению (цитата):

*«…1.3.3. Отличительные свойства направления.*

*Направление обладает следующими отличительными характеристиками:*

*1) подготовка выпускника-бакалавра прикладной информатики предусматривает выделение значительного времени для базовой подготовки и освоения прикладных аспектов компьютерных наук, математики и кибернетики в экономических, гуманитарных и социальных областях.*

*1.3.4. Объекты профессиональной деятельности.*

*Объектами профессиональной деятельности бакалавра являются:*

*- информационные процессы, которые определяются спецификой предметной области;*

*- события, функциональные процессы и… действия по выработке управленческого решения или по разработке экспертного заключения, информационные потоки, ресурсы (материальные, информационные и иные нематериальные, денежные и др.) – в организациях, характерных для предметной области*

*1.3.6. Задачи профессиональной деятельности выпускника.*

*Бакалавр должен быть подготовлен к решению следующих профессиональных задач:*

*- рациональное управление взаимосвязанными материальными, денежными и информационными потоками;*

*- постановка и решение оптимизационных задач;*

*- применение методов системного анализа и алгоритмов математического программирования при адаптации информационных систем в предметной области;*

*1.3.7. Квалификационные требования.*

*Бакалавр* ***должен обладать****:*

*- коммуникационной готовностью решения экономико-математических задач предметной области.*

*Бакалавр* ***должен знать****:*

*- задачи предметной области и методы их решения;*

*Бакалавр* ***должен уметь****:*

*- формулировать и решать задачи проектирования профессионально-ориентированных информационных систем для предметной области с использованием различных методов и решений;*

*... 7.1. Требования к профессиональной подготовленности.*

*Бакалавр* ***должен обладать****:*

*- профессиональной способностью прогнозирования, моделирования и создания информационных процессов в конкретной предметной области;*

*7.1.3. По циклу общепрофессиональных дисциплин*

*Бакалавр* ***должен знать****:*

*- математические методы в предметной области и методы оптимизации;*

*Бакалавр* ***должен уметь*** *использовать:*

*- современные математические методы в предметной области и оптимизацию;*

*Бакалавр* ***должен иметь*** *опыт:*

*- применения математических моделей и методов для анализа, расчетов, оптимизации детерминированных и случайных информационных процессов в предметной области*»

Требования ГОС к обязательному минимуму содержания дисциплины приводятся в таблице 1.

Таблица 1

| | |
|---|---|
| ОПД.Ф.12 | **Прикладные методы оптимизации**<br>Линейное программирование: симплекс-метод решения задач линейного программирования, метод искусственного базиса, двойственный симплекс-метод, оптимизация производственной программы; теория двойственности: определение двойственной задачи, экономическая интерпретация двойственной задачи, интерпретация двойственных оценок при различных критериях, теоремы теории двойственности, послеоптимизационный анализ решения задачи линейного программирования. Специальные задачи линейного программирования: транспортная задача, задача о назначениях, задача о коммивояжере.<br>Параметрическое программирование: параметрические задачи с параметрами в целевой функции и векторе ограничений, интервалы оптимальности и устойчивости, определение и свойства решающих функций.<br>Целочисленное программирование: классификация прикладных задач целочисленного линейного программирования, метод Гомори, методы ветвей и границ. Многокритериальная оптимизация: достижимое множество, «идеальная» точка, оптимальные решения по Парето, методы решения задач многокритериальной оптимизации. Сетевые методы в планировании и управлении: сетевая модель, расчет основных параметров сетевого графика. Нелинейная оптимизация: условия оптимальности. Метод множителей Лагранжа. Задача выпуклого программирования. Седловая точка. Теорема Куна-Таккера. Квадратичный С-метод.<br>Основные понятия динамического программирования. Математические модели в экономике. Функции полезности и спроса. Равновесные цены и динамика цен. Элементы теории игр. |

## 1.2. Особенности (принципы) построения дисциплины

Особенности (принципы) построения дисциплины описываются в табл. 2.

Таблица 2

| **Особенность (принцип)** | **Содержание** |
|---|---|
| Основание для введения | Государственный образовательный стандарт Высшего профессионального образования по направлению 080800 «Прикладная информатика» (бакалавриат). |
| Адресат | Студенты 2 курса факультета бизнеса, обучающиеся по направлению 080800 «Прикладная информатика» (бакалавриат). |
| Основная цель | Развитие и закрепление навыков системного подхода для оптимизации процессов обработки информации при решении экономических задач. |
| Ядро | Обучение методам построения и анализа математических моделей оптимизации различных процессов и явлений в экономических системах. |
| Объем в часах | Курс рассчитан на один семестр. По курсу предполагается лекций – 17 часов, практических занятий – 17 часов, лабораторных работ – 17 часов. Запланирован курсовой проект (КП) из 2-х частей (5 расчетно-графических работ (РГР) и программная часть) в рамках самостоятельной работы по всему курсу – 34 часа. |

Окончание таблицы 2

| Особенность (принцип) | Содержание |
|---|---|
| Требования к начальной подготовке, необходимые для успешного усвоения дисциплины | Для успешного изучения курса студенту необходимо знание основ математического анализа, линейной алгебры и опыт работы на персональном компьютере в среде DOS и Windows 2000/XP, а также знание ППП MS Office 2000/XP. |
| Основные понятия | Модель системы, экономико-математическая модель, целевая функция, ограничения, критерии оптимальности, условная оптимизация, математическое программирование, линейное программирование, допустимое решение, единственность и множественность решений, оптимальный план, симплекс-метод, базис, опорный план, шаг решения – итерация, двойственные оценки, анализ устойчивости, транспортная таблица, потенциал, вырожденный опорный план, дискретное программирование, целочисленное решение, отсекающие плоскости, правильное отсечение, ветви и границы, дополнительные ограничения, дерево решений, рекорд, логическая целевая функция, динамическое программирование, управление, оптимальное управление, принцип оптимальности, функциональные уравнения, выпуклое программирование, условия Куна – Таккера, седловая точка, квадратичное программирование. |
| Обеспечение последующих дисциплин образовательной программы | Успешное освоение курса создает необходимую базу для изучения таких последующих дисциплин как математическая экономика и имитационное моделирование. |
| Практическая часть дисциплины | Курс имеет практическую направленность: практических занятий – 17 часов, лабораторных работ – 17 часов, самостоятельная работа – 34 часа для выполнения КП из 2-х частей |
| Области применения полученных знаний и умений | Курс обеспечивает подготовку в областях практического использовании экономико-математических моделей и оптимизации процессов обработки информации при принятии управленческих решений, определяемых требованиями ГОС. |
| Описание основных «точек» контроля | Промежуточный контроль осуществляется на защитах лабораторных работ, КП (задания защищаются последовательно в течение семестра) и проверки контрольной работы в середине семестра. Итоговая оценка знаний осуществляется с помощью рейтинговой системы и зачета по всем раздела курса. |
| Дисциплина и современные информационные технологии | Для проведения лабораторных работ и выполнения РГР используются средства ППП MS Office (Word, Excel), а также «Пакет Экономических Расчетов». |

## 1.3. Цели учебной дисциплины

Цели изучения данной учебной дисциплины направлены на то, что, в соответствии с требованиями ГОС, после ее изучения студент должен (см. табл.3):

Таблица 3

| Номер цели | Содержание цели |
|---|---|
| | ***иметь представление:*** |
| 1 | о множестве задач, являющихся предметом математического программирования (МП) и методах их решения; |
| 2 | об особенностях построения моделей вообще и экономико-математических моделей в частности; |
| 3 | о направлениях МП, развиваемых в настоящее время; |
| | ***знать:*** |
| 4 | объект курса (экономические системы), предмет курса (математическая модель экономической системы как основа ее анализа), задачи курса (выбор параметров системы и методика построения ее математической модели); |
| 5 | роль МП как одной из основных дисциплин по данному направлению; |
| 6 | основные понятия: система, экономическая система, экономико-математическая модель; |
| 7 | основные разновидности экономико-математических моделей (линейные, нелинейные, динамические и др.); |
| 8 | методы анализа этих моделей (симплекс-метод, метод ветвей и границ и т.д.); |
| 9 | методы послеоптимизационного анализа решения задач МП для выработки практических рекомендаций; |
| | ***уметь:*** |
| 10 | использовать системный подход для постановки задачи МП; |
| 11 | определять множество параметров экономической системы, необходимых для анализа, и выбирать из них главный – целевую функцию; |
| 12 | выбирать метод решения задачи в зависимости от вида ее математической модели; |
| 13 | решать задачи МП, используя как аналитические методы, так и компьютерные технологии; |
| 14 | проводить экономический анализ полученного решения с целью выработки практических рекомендаций; |
| 15 | представлять результаты решения задач МП в удобной для восприятия форме. |

Из-за недостатка часов, отведенных учебным планом на изучение данной дисциплины, при выполнении программы курса и для достижении ее основных целей необходимо учитывать следующее:

1. Разделы «Многокритериальная оптимизация» и «Параметрическая оптимизация» рассматриваются в курсе «Математическая экономика», который входит в цикл специальных дисциплин, устанавливаемых вузом (СД.00) на основании требований ГОС подготовки бакалавров по направлению 080800 «Прикладная информатика».

2. Разделы «Сетевые методы в планировании и управлении», «Математические модели в экономике», «Функции полезности и спроса. Равновесные цены и динамика цен», «Элементы теории игр» рассматриваются в курсе «Имитационное

моделирование», который входит в цикл общепрофессиональных дисциплин (ОПД.Ф.11), устанавливаемых ГОС подготовки бакалавров по направлению 080800 «Прикладная информатика».

### 1.4. Содержание и структура учебной дисциплины

Структура курса «Прикладные методы оптимизации» (ПМО) как взаимосвязь ее отдельных блоков, определяемая целями курса, представлена на рис.1.1.

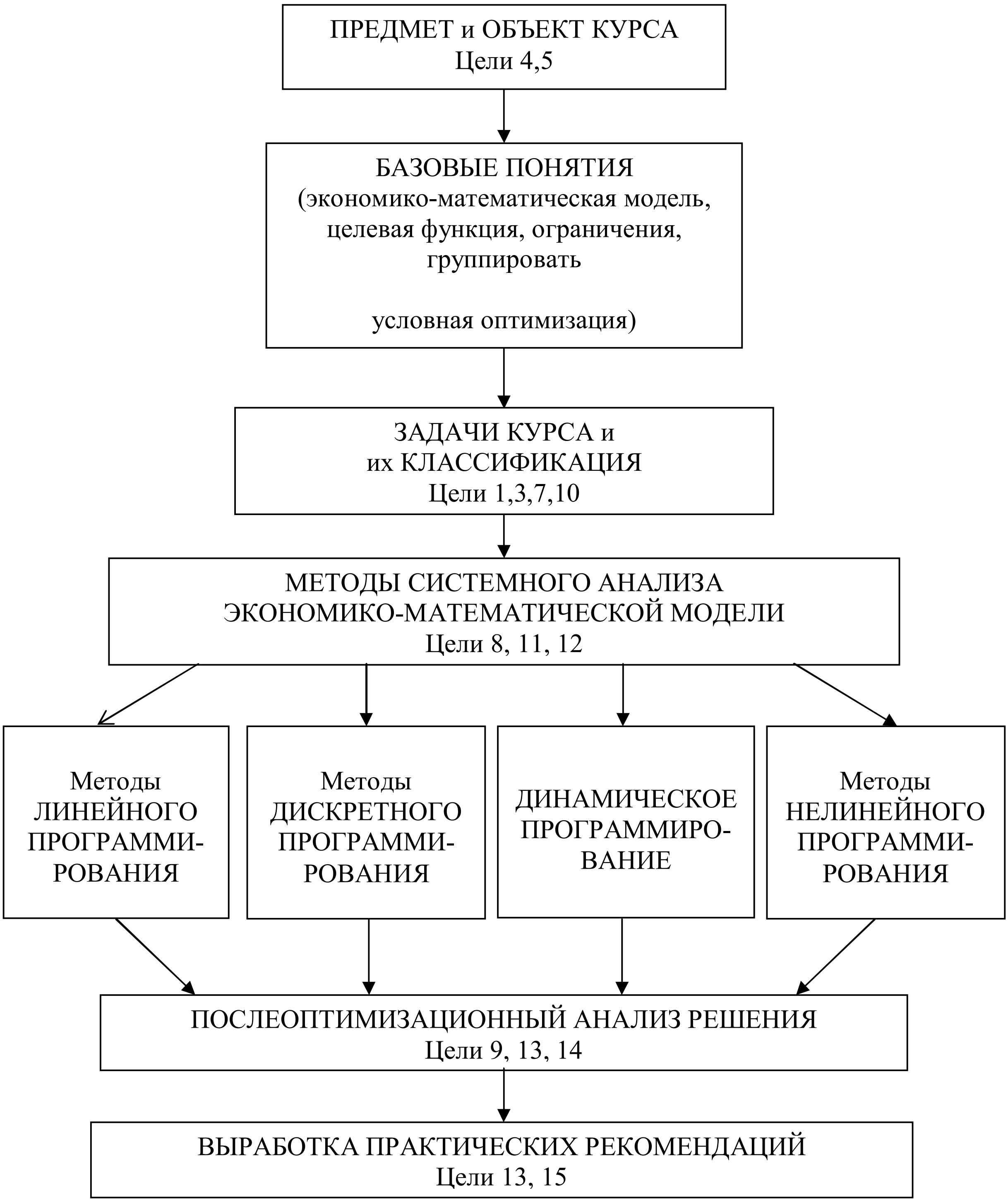


Рис. 1.1

### 1.4.1. Темы лекционных занятий

Описание лекционных занятий приводится в табл. 4.

Таблица 4.

| Темы | Часы | Цели курса |
|---|---|---|
| **Модуль 1. Введение в курс** | | |
| *Тема 1. Предмет, содержание и задачи курса*<br>Предмет и объект курса ПМО как задачи математического программирования (МП). Математические модели экономических систем. Примеры их построения. Постановка задачи МП в общем виде. Классификация задач МП. | 1 | 1–7 |
| **Модуль 2. Линейное программирование (ЛП)** | | |
| *Тема 2. Постановка задачи ЛП и ее особенности*<br>Постановка задачи линейного программирования и ее формы (основная, симметричная, каноническая). Решения задачи ЛП (допустимое, оптимальное) и их свойства. Основная теорема ЛП. Графическое решение задачи ЛП. Примеры. | 2 | 10, 11 |
| *Тема 3. Симплекс – метод решения задачи ЛП*<br>Идея симплекс-метода, базис, опорное решение. Вырожденное и невырожденное решения задачи ЛП. Вычислительная схема. Экономическая интерпретация. Примеры. | 2 | 8, 12 |
| *Тема 4. Двойственность в ЛП*<br>Двойственность в ЛП. Основные теоремы. Условия «дополняющей нежесткости». Двойственные оценки. Устойчивость решения задачи ЛП. Анализ устойчивости с помощью двойственных оценок. Экономический анализ с помощью двойственных оценок. | 2 | 8, 9, 12 |
| *Тема 5. Транспортная задача ЛП*<br>Постановка транспортной задачи (ТЗ) ЛП и ее разновидности (закрытая, открытая). Методы построения опорных планов для решения ТЗ ЛП. Условия невырожденности решения ТЗ ЛП. Метод потенциалов решения ТЗ. | 2 | 8, 9, 12 |
| **Модуль 3. Дискретное программирование (ДКП)** | | |
| *Тема 6. Постановка и решения задачи ЦЛП*<br>Постановка задачи дискретного программирования и ее формы – целочисленное линейное (ЦЛП) и булево (БП) программирование. Общая характеристика методов решения задачи ЦЛП. Метод Гомори для решения задачи ЦЛП. Метод ветвей и границ для решения задачи ЦЛП. | 2 | 8,<br>10 – 12 |
| *Тема 7. Методы решения особых задач ЛП*<br>Задача о назначениях как пример задачи БП. Венгерский метод для решения задачи о назначениях. Задача о коммивояжере как особая задача ДКП. Модификация метода ветвей и границ для решения задачи о коммивояжере. | 2 | 8, 9, 12 |
| **Модуль 4. Динамическое программирование (ДП)** | | |
| *Тема 8. Постановка задачи ДП*<br>Модель динамического программирования. Фазовое пространство. Понятие оптимального управления в задачах ДП. Принцип оптимальности. Функциональные уравнения Беллмана. Задача выбора оптимального маршрута. | 2 | 8,<br>10 – 12 |

Окончание таблицы 4.

| Темы | Часы | Цели курса |
|---|---|---|
| *Тема 9. Динамические решения задач оптимизации*<br>Задача оптимальной загрузки транспортного средства. Задача оптимального распределения ресурсов. Задача оптимального управления запасами. | 2 | 8, 9, 12 |

### 1.4.2. Темы практических занятий

Описание практических занятий приводится в табл. 5.

Таблица 5

| Темы | Решая задачи, студенты учатся: | Часы | Цели |
|---|---|---|---|
| **Линейное программирование** | | | |
| Построение линейных моделей | – использовать системный подход для построения математических моделей задач. | 2 | 10, 11 |
| Анализ линейных моделей | – выбирать способ анализа – симплекс-метод;<br>– оценивать полученные результаты. | 2 | 8,12 |
| Послеоптимизационный анализ | – исследовать решения задач для выработки экономических рекомендаций. | 2 | 9, 14 |
| Построение и анализ транспортных моделей | – строить начальный опорный план ТЗ различными способами;<br>– использовать метод потенциалов для нахождения оптимального плана ТЗ. | 2 | 8, 9, 12 |
| **Целочисленное линейное программирование** | | | |
| Метод Гомори и метод ветвей и границ | – строить математическую модель задачи с учетом целочисленности переменных;<br>– выбирать метод решения задачи ЦЛП. | 2 | 8, 12 |
| Венгерский метод | – строить математическую модель задачи с учетом целочисленности переменных;<br>– выбирать метод решения задачи ЦЛП. | 1 | 8, 9, 12 |
| Задача о коммивояжере | – использовать метод ветвей и границ;<br>– строить дерево решений. | 2 | 8, 9 12 |
| **Динамическое программирование** | | | |
| Принцип оптимальности | – использовать системный подход для построения динамической модели задачи;<br>– записывать уравнения состояния динамической системы. | 1 | 10, 11 |
| Задача о распределении средств | – строить динамическую модель задачи;<br>– использовать принцип оптимальности для решения задачи. | 1 | 8, 9, 12 |
| Задача о ранце | – строить динамическую модель задачи;<br>– решать определенные задачи ЛП методом ДП. | 1 | 8, 9, 12 |
| Задача управления запасами | – строить динамическую модель задачи;<br>– использовать принцип оптимальности для решения задачи. | 1 | 8, 9, 12 |

Окончание таблицы 5

| Темы | Решая задачи, студенты | Часы | Цели |
|---|---|---|---|
| Итоговый тест (25 задач) | демонстрируют умение строить и анализировать разнообразные экономико-математические модели различными методами. | 2 | 10 – 14 |

### 1.4.3. Темы лабораторных занятий

Описание лабораторных занятий приводится в табл. 6.

Таблица 6

| Тема | Выполняя работу, студенты: | Часы | Цели |
|---|---|---|---|
| Линейное программирование | – приобретают навыки решения задачи ЛП на ПК;<br>– углубляют представления о свойствах решения пары двойственных задач;<br>– сравнивают результаты, полученные на ПК, с аналитическим решением. | 4 | 10 – 15 |
| Транспортная задача | – строят математическую модель задачи и вводят ее в ПК;<br>– выбирают метод расчета;<br>– анализируют полученное решение;<br>– сравнивают результаты, полученные на ПК, с аналитическим решением. | 4 | 10 – 15 |
| Целочисленное программирование | – приобретают навыки решения задачи ЦЛП на ПК;<br>– учатся строить правильные отсечения и добавлять их к основным ограничениям задачи для реализации метода Гомори на ПК;<br>– строят дерево решений по методу ветвей и границ;<br>– сравнивают результаты, полученные разными методами. | 4 | 10 – 15 |
| Динамическое программирование | – учатся строить модели динамического типа для задач различной природы;<br>– определяют состояния управляющей системы;<br>– приобретают опыт решения задач ДП на ПК. | 4 | 10 – 15 |
| Защита лабораторных работ | – обосновывают выбранный метод решения и отвечают на контрольные вопросы преподавателя. | 1 | 6 – 9 |

## 1.5. Учебная деятельность

В рамках самостоятельной работы по курсу ПМО студенты выполняют и защищают курсовой проект, который состоит из двух частей.

В первую часть входит выполнение 5 заданий по основным разделам курса:

1. Линейное программирование.

2. Транспортная задача.

3. Целочисленное программирование.

4. Задача о коммивояжере.

5. Динамическое программирование.

Индивидуальные задания к каждой РГР приведены в части 2 настоящей работы. Отчет по каждому заданию первой части представляется печатным документом в стандартной форме формата А4, содержание отчета указано в соответствующем пункте каждого задания, приведенном во 2-й части настоящей работы. Защита каждого задания первой части проводится в форме устного опроса по основным теоретическим и практическим моментам выполнения каждого задания.

Во второй части проекта алгоритмы решения задач оптимизации, теоретически и практически освоенные студентами в первой части, должны быть использованы для реализации их программного решения. Язык программирования выбирается на усмотрение студента. В отчете по второй части студенту необходимо представить листинги написанных программ, а при защите второй части курсового проекта – продемонстрировать их работоспособность.

Кроме того, в середине семестра предусмотрена контрольная работа для проверки знаний по пройденному материалу.

### 1.6. Аттестация студентов по учебной дисциплине

Для итоговой аттестации студентов по курсу ПМО используется рейтинговая система оценки знаний, информация о которой представлена в таблице 7.

Таблица 7

| № п/п | Учебная деятельность | Максимальный рейтинг | Рейтинг, достаточный для зачета |
|---|---|---|---|
| 1 | Выполнение и защита л. р. 1 | 5 | 4 |
| 2 | Выполнение и защита л. р. 2 | 5 | 4 |
| 3 | Выполнение и защита л. р. 3 | 5 | 4 |
| 4 | Выполнение и защита л. р. 4 | 5 | 4 |
| 5 | Выполнение и защита РГР 1 | 10 | 8 |
| 6 | Выполнение и защита РГР 2 | 5 | 4 |
| 7 | Выполнение и защита РГР 3 | 5 | 4 |
| 8 | Выполнение и защита РГР 4 | 5 | 4 |

Окончание таблицы 7

| № п/п | Учебная деятельность | Максимальный рейтинг | Рейтинг, достаточный для зачета |
|---|---|---|---|
| 9 | Выполнение и защита РГР 5 | 5 | 4 |
| 10 | Выполнение и защита программной части курсового проекта | 20 | 16 |
| 11 | Контрольная работа | 5 | 4 |
| 12 | Итоговый тест | 25 | 20 |
| **Оценка деятельности за семестр** | | **100** | **80** |

## 1.7. Литература по курсу

**Основная литература**


1. Математические модели и методы в экономических задачах. Задания к расчетно-графическим работам и методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов факультета бизнеса. Составитель *С.О.Веселовская*. – Новосибирск, НГТУ, 1997.
2. Методы оптимизации. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов I и II курсов факультета бизнеса. Составители: *Ю.В. Кириллов, Ю.А. Мезенцев, А.А. Наумов*. – Новосибирск, НГТУ, 2002.
3. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1993.
4. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций: Учебное пособие для вузов – Киев: Вища школа, 1988.
5. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов/ Под ред. *Н.Ш.Кремера*. – М.: ЮНИТИ, 1997.
6. Математическое программирование. /Под ред. *А.В.Кузнецова*. – Минск: Вышэйшая школа, 1994.
7. Математическое программирование: Сборник задач./Под ред. *А.В.Кузнецова*. – Минск: Вышэйшая школа, 1995.

**Дополнительная литература**

8. *Акофф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций. – М.: Мир. 1971.
9. *Алексеев В.М.* и др. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи. – М.: Наука, 1984.
10. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
11. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972,1973.- т.1-3.
12. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. – М.: Советское радио, 1988.
13. *Нит И.В.* Линейное программирование. – М.: МГУ, 1978.
14. Экономико-математические методы и прикладные модели./Под ред. *В.В.Федосеева*. – М.: ЮНИТИ, 1999.
15. *Юдин Д.Б., Юдин А.Д.*Экстремальные модели в экономике – М.: Экономика, 1979.

# 2. ЗАДАНИЯ К РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ

## 2.1. Задание 1

***Тема задания:*** «Линейное программирование. Теория двойственности».

***Цели задания:***

1. *Понимать смысл, различать, осознанно использовать следующие понятия:* математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП); формы записи ЗЛП; геометрическая интерпретация ЗЛП; линии уровня функции; градиент функции; двойственные задачи; двойственные оценки; устойчивость решения ЗЛП; устойчивость оценок.

2. *Получить навыки, уметь:* строить математические модели ЗЛП; переходить от одной формы записи ЗЛП к другой; решать графически ЗЛП с двумя переменными; строить модель задачи, двойственной к исходной; находить решение ЗЛП на основе решения задачи, двойственной к ней; интерпретировать по-

лученные результаты в терминах решаемой задачи; проводить анализ устойчивости решения ЗЛП на основе геометрической интерпретации.

***<u>Условие задачи.</u>***

Коммерческая фирма предполагает осуществить оптовую закупку продовольствия, располагая для этого суммой $\boldsymbol{S}$ рублей. Номенклатура продовольствия включает пять наименований. Покупная цена каждого вида продукта равна соответственно $\boldsymbol{s_1}$, $\boldsymbol{s_2}$, $\boldsymbol{s_3}$, $\boldsymbol{s_4}$ и $\boldsymbol{s_5}$ рублей за килограмм. В распоряжении фирмы имеются холодильные камеры общей площадью $\boldsymbol{V}$ кв. метров. Площадь, необходимая для хранения одного килограмма продукта каждого вида, равна соответственно $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, $\boldsymbol{v_4}$ кв. м; при этом продукт пятого вида хранению не подлежит и должен быть реализован немедленно. При своевременной реализации продукта каждого вида прибыль фирмы составит соответственно $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{p_3}$, $\boldsymbol{p_4}$ и $\boldsymbol{p_5}$ рублей за килограмм.

Определить объемы закупки продовольствия каждого вида, при которых фирма может рассчитывать на максимальную прибыль.

***<u>Задание.</u>***

1. Записать математическую модель задачи.
2. Построить модель задачи, двойственной к заданной, и дать ее геометрическую интерпретацию.
3. Решить двойственную задачу графически. Используя полученный результат, найти решение исходной задачи.
4. Дать экономическую интерпретацию двойственным оценкам.
5. Произвести анализ устойчивости полученного решения и двойственных оценок на основе геометрической интерпретации двойственной задачи.
6. Решить задачу с помощью Пакета Экономических расчетов (ПЭР) и сравнить результаты решения с результатами, полученными вручную (см. «Лабораторная работа №1»).

***Варианты заданий*** (табл. 8).

Таблица 8

| № вар. | $S$ | $V$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 000 | 120 | 30 | 30 | 10 | 10 | 20 | 0.1 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | 9 | 15 | 8 | 9 | 2 |
| 2 | 6 400 | 108 | 40 | 60 | 30 | 10 | 50 | 0.3 | 1.2 | 1.7 | 0.4 | 24 | 66 | 51 | 16 | 5 |
| 3 | 8 000 | 176 | 60 | 20 | 60 | 20 | 40 | 0.1 | 0.1 | 1.1 | 1.1 | 12 | 10 | 66 | 44 | 6 |
| 4 | 13 000 | 50 | 30 | 50 | 30 | 50 | 40 | 0.2 | 0.2 | 1.6 | 0.1 | 18 | 20 | 48 | 5 | 12 |
| 5 | 5 000 | 190 | 40 | 30 | 20 | 30 | 50 | 0.1 | 0.2 | 0.8 | 2.0 | 12 | 18 | 32 | 60 | 5 |
| 6 | 3 000 | 180 | 140 | 40 | 20 | 10 | 40 | 0.3 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 42 | 38 | 30 | 20 | 8 |
| 7 | 9 000 | 130 | 50 | 80 | 50 | 60 | 50 | 0.5 | 1.2 | 1.9 | 0.4 | 50 | 96 | 95 | 48 | 15 |
| 8 | 15 500 | 200 | 100 | 70 | 40 | 10 | 100 | 0.4 | 0.7 | 1.6 | 1.4 | 40 | 49 | 64 | 20 | 10 |
| 9 | 3 000 | 120 | 120 | 60 | 50 | 20 | 70 | 0.4 | 1.2 | 1.8 | 1.2 | 48 | 72 | 90 | 48 | 14 |
| 10 | 15 000 | 100 | 20 | 10 | 50 | 10 | 20 | 0.1 | 0.1 | 0.7 | 0.6 | 14 | 12 | 70 | 24 | 4 |
| 11 | 17 000 | 220 | 120 | 100 | 70 | 40 | 60 | 0.4 | 0.8 | 1.4 | 1.6 | 48 | 80 | 98 | 64 | 6 |
| 12 | 15 000 | 200 | 30 | 60 | 50 | 20 | 60 | 0.1 | 0.7 | 1.0 | 2.0 | 15 | 42 | 50 | 36 | 12 |
| 13 | 7 000 | 210 | 150 | 120 | 80 | 30 | 100 | 0.7 | 1.1 | 1.6 | 1.0 | 105 | 132 | 128 | 60 | 20 |
| 14 | 25 000 | 40 | 60 | 110 | 65 | 25 | 40 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 1.0 | 18 | 55 | 65 | 50 | 8 |
| 15 | 5 000 | 125 | 160 | 20 | 130 | 25 | 90 | 1.3 | 0.6 | 1.6 | 0.5 | 208 | 48 | 208 | 50 | 27 |
| 16 | 18 000 | 40 | 60 | 70 | 40 | 10 | 50 | 0.2 | 0.7 | 1.3 | 1.1 | 24 | 49 | 52 | 22 | 10 |
| 17 | 12 000 | 100 | 70 | 30 | 30 | 25 | 100 | 0.2 | 0.2 | 0.4 | 1.0 | 28 | 24 | 36 | 50 | 10 |
| 18 | 8 000 | 120 | 80 | 80 | 40 | 85 | 60 | 0.4 | 0.8 | 1.2 | 0.3 | 56 | 64 | 48 | 51 | 18 |
| 19 | 7 500 | 160 | 140 | 60 | 70 | 25 | 100 | 0.6 | 0.4 | 1.4 | 1.0 | 84 | 48 | 98 | 50 | 40 |
| 20 | 14 000 | 120 | 90 | 50 | 50 | 30 | 60 | 0.3 | 0.4 | 0.6 | 0.9 | 54 | 50 | 60 | 54 | 12 |
| 21 | 9 000 | 110 | 50 | 80 | 50 | 30 | 60 | 0.5 | 1.2 | 1.5 | 2.1 | 50 | 96 | 75 | 63 | 24 |
| 22 | 4 000 | 100 | 80 | 60 | 40 | 20 | 100 | 0.8 | 1.2 | 1.6 | 2.0 | 64 | 72 | 64 | 40 | 30 |
| 23 | 12 000 | 180 | 100 | 60 | 30 | 10 | 100 | 1.0 | 1.2 | 1.5 | 2.0 | 100 | 72 | 45 | 20 | 50 |
| 24 | 6 500 | 200 | 180 | 80 | 60 | 50 | 150 | 1.2 | 1.2 | 1.8 | 2.0 | 144 | 96 | 108 | 100 | 30 |
| 25 | 14 400 | 90 | 150 | 180 | 80 | 30 | 140 | 0.6 | 1.8 | 1.6 | 1.0 | 90 | 216 | 128 | 60 | 14 |

## 2.2. Задание 2

***Тема задания:*** «Транспортная задача».

***Цели задания:***

1. *Понимать смысл, различать, осознанно использовать следующие понятия:* транспортная задача (ТЗ) в матричной форме; открытая и закрытая модели ТЗ; транспортная таблица; допустимый, опорный, оптимальный планы ТЗ; поставки, перераспределение поставок; потенциалы строк и столбцов транспортной таблицы как двойственные оценки; характеристики клеток транспортной таблицы; цикл пересчета; альтернативные решения ТЗ.

2. *Получить навыки, уметь:* строить математическую модель ТЗ; переходить от открытой модели ТЗ к закрытой; использовать различные методы для построения опорных планов ТЗ; решать ТЗ методом потенциалов; анализировать полученное решение и находить альтернативные варианты, если они есть; интерпретировать полученное решение в терминах поставленной задачи.

***Условие задачи.***

Транспортная фирма обслуживает $\boldsymbol{n}$ поставщиков и $\boldsymbol{m}$ потребителей однородного груза. В течение дня из каждого пункта поставки фирма должна вывезти соответственно $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_n}$ тонн груза, а в каждый пункт потребления доставить соответственно $\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2}, \ldots, \boldsymbol{B_m}$ тонн. Себестоимость перевозки одной тонны груза от $i$-го поставщика $j$-му потребителю задана матрицей $C = \left\| c_{ij} \right\|_{n \times m}$.

Найти такой план перевозки грузов, при котором издержки транспортной фирмы будут минимальными.

***Задание.***

1. Записать математическую модель задачи.

2. Построить математическую модель задачи, двойственной к заданной.

3. Построить опорные планы ТЗ методом северо-западного угла, методом минимального элемента и методом Фогеля. Сравнить результаты.

4. На основе опорного плана, полученного методом северо-западного угла, решить задачу методом потенциалов.

5. Опираясь на последнюю транспортную таблицу, найти решение двойственной задачи.

6. Решить задачу с помощью ПЭР и сравнить результаты решения с результатами, полученными вручную (см. «Лабораторная работа №2»).

***Варианты заданий.***

*Вариант 1*

$n = 3$, $m = 5$;

$A_1 = 200$, $A_2 = 175$, $A_3 = 210$;

$B_1 = 100$, $B_2 = 130$, $B_3 = 80$, $B_4 = 190$, $B_5 = 100$;

$$C = \begin{Vmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 10 \\ 5 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 2*

$n = 3$, $m = 5$;

$A_1 = 700$, $A_2 = 250$, $A_3 = 510$;

$B_1 = 350$, $B_2 = 330$, $B_3 = 280$, $B_4 = 90$, $B_5 = 550$;

$$C = \begin{Vmatrix} 11 & 5 & 8 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 10 & 9 \\ 10 & 7 & 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 3*

$n = 3$, $m = 5$;

$A_1 = 300$, $A_2 = 315$, $A_3 = 405$;

$B_1 = 200$, $B_2 = 145$, $B_3 = 180$, $B_4 = 330$, $B_5 = 315$;

$$C = \begin{Vmatrix} 8 & 7 & 12 & 5 & 7 \\ 11 & 9 & 5 & 5 & 8 \\ 12 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 4*

$n = 3$, $m = 5$;

$A_1 = 80$, $A_2 = 320$, $A_3 = 225$;

$B_1 = 215$, $B_2 = 110$, $B_3 = 120$, $B_4 = 90$, $B_5 = 125$;

$$C = \begin{Vmatrix} 10 & 8 & 12 & 9 & 6 \\ 5 & 7 & 11 & 6 & 7 \\ 12 & 8 & 9 & 12 & 10 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 5*

$n = 3$, $m = 5$;

$A_1 = 250$, $A_2 = 300$, $A_3 = 275$;

$B_1 = 115$, $B_2 = 310$, $B_3 = 135$, $B_4 = 290$, $B_5 = 75$;

$$C = \begin{Vmatrix} 15 & 6 & 4 & 8 & 10 \\ 4 & 11 & 7 & 8 & 9 \\ 12 & 9 & 6 & 7 & 7 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 6*

$n = 3$, $m = 5$;

$A_1 = 420$, $A_2 = 425$, $A_3 = 425$;

$B_1 = 300$, $B_2 = 225$, $B_3 = 275$, $B_4 = 310$, $B_5 = 220$;

$$C = \begin{Vmatrix} 3 & 12 & 9 & 5 & 7 \\ 7 & 14 & 12 & 5 & 8 \\ 4 & 11 & 4 & 10 & 9 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 7*

$n = 3$, $m = 5$;

$A_1 = 250$, $A_2 = 200$, $A_3 = 175$;

$B_1 = 120$, $B_2 = 130$, $B_3 = 100$, $B_4 = 160$, $B_5 = 140$;

$$C = \begin{Vmatrix} 17 & 8 & 6 & 12 & 22 \\ 14 & 10 & 9 & 8 & 13 \\ 12 & 7 & 6 & 9 & 10 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 8*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 400,\ A_2 = 265,\ A_3 = 515;$

$B_1 = 220,\ B_2 = 230,\ B_3 = 250,\ B_4 = 220,\ B_5 = 310;$

$$C = \begin{Vmatrix} 15 & 17 & 14 & 12 & 15 \\ 17 & 11 & 13 & 11 & 10 \\ 12 & 13 & 16 & 18 & 17 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 9*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 225,\ A_2 = 385,\ A_3 = 300;$

$B_1 = 120,\ B_2 = 220,\ B_3 = 120,\ B_4 = 300,\ B_5 = 250;$

$$C = \begin{Vmatrix} 10 & 15 & 10 & 5 & 8 \\ 11 & 12 & 17 & 10 & 12 \\ 10 & 8 & 16 & 20 & 21 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 10*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 220,\ A_2 = 450,\ A_3 = 425;$

$B_1 = 150,\ B_2 = 215,\ B_3 = 225,\ B_4 = 200,\ B_5 = 320;$

$$C = \begin{Vmatrix} 9 & 17 & 11 & 11 & 26 \\ 21 & 11 & 17 & 19 & 8 \\ 17 & 12 & 17 & 19 & 10 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 11*

$n=4,\ m=4;$

$A_1 = 420,\ A_2 = 270,\ A_3 = 310,\ A_4 = 370;$

$B_1 = 100,\ B_2 = 130,\ B_3 = 650,\ B_4 = 400;$

$$C = \begin{Vmatrix} 5 & 12 & 9 & 5 \\ 10 & 8 & 5 & 10 \\ 10 & 12 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 11 & 8 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 12*

$n=4,\ m=4;$

$A_1 = 300,\ A_2 = 250,\ A_3 = 280,\ A_4 = 150;$

$B_1 = 80,\ B_2 = 220,\ B_3 = 155,\ B_4 = 495;$

$$C = \begin{Vmatrix} 25 & 17 & 14 & 20 \\ 19 & 21 & 17 & 23 \\ 18 & 14 & 18 & 19 \\ 24 & 17 & 13 & 20 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 13*

$n=4,\ m=4;$

$A_1 = 380,\ A_2 = 525,\ A_3 = 470,\ A_4 = 245;$

$B_1 = 315,\ B_2 = 235,\ B_3 = 480,\ B_4 = 490;$

$$C = \begin{Vmatrix} 9 & 8 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 11 & 7 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 14*

$n=4,\ m=4;$

$A_1 = 120,\ A_2 = 150,\ A_3 = 200,\ A_4 = 240;$

$B_1 = 90,\ B_2 = 80,\ B_3 = 150,\ B_4 = 300;$

$$C = \begin{Vmatrix} 6 & 8 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 9 & 8 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 15*

$n$ =4, $m$ =4;

$A_1 = 210$, $A_2 = 190$, $A_3 = 260$, $A_4 = 150$;

$B_1 = 110$, $B_2 = 225$, $B_3 = 180$, $B_4 = 200$;

$$C = \begin{Vmatrix} 5 & 8 & 12 & 6 \\ 11 & 12 & 9 & 13 \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 5 & 10 & 5 & 7 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 16*

$n$ =4, $m$ =4;

$A_1 = 310$, $A_2 = 250$, $A_3 = 335$, $A_4 = 270$;

$B_1 = 380$, $B_2 = 120$, $B_3 = 540$, $B_4 = 70$;

$$C = \begin{Vmatrix} 3 & 8 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 7 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 17*

$n$ =4, $m$ =4;

$A_1 = 270$, $A_2 = 270$, $A_3 = 355$, $A_4 = 355$;

$B_1 = 120$, $B_2 = 190$, $B_3 = 380$, $B_4 = 490$;

$$C = \begin{Vmatrix} 12 & 8 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 12 & 7 & 13 \\ 16 & 9 & 15 & 8 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 18*

$n$ =4, $m$ =4;

$A_1 = 330$, $A_2 = 255$, $A_3 = 270$, $A_4 = 325$;

$B_1 = 200$, $B_2 = 130$, $B_3 = 475$, $B_4 = 300$;

$$C = \begin{Vmatrix} 18 & 20 & 19 & 8 \\ 9 & 14 & 20 & 17 \\ 12 & 15 & 9 & 10 \\ 8 & 19 & 11 & 18 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 19*

$n$ =4, $m$ =4;

$A_1 = 150$, $A_2 = 275$, $A_3 = 220$, $A_4 = 300$;

$B_1 = 180$, $B_2 = 125$, $B_3 = 125$, $B_4 = 415$;

$$C = \begin{Vmatrix} 16 & 10 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 9 & 9 \\ 12 & 17 & 19 & 20 \\ 12 & 8 & 11 & 16 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 20*

$n$ =4, $m$ =4;

$A_1 = 300$, $A_2 = 200$, $A_3 = 215$, $A_4 = 410$;

$B_1 = 150$, $B_2 = 220$, $B_3 = 400$, $B_4 = 275$;

$$C = \begin{Vmatrix} 14 & 12 & 18 & 13 \\ 10 & 7 & 21 & 10 \\ 11 & 17 & 12 & 25 \\ 24 & 8 & 11 & 19 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 21*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 300,\ A_2 = 420,\ A_3 = 105;$

$B_1 = 215,\ B_2 = 110,\ B_3 = 125,\ B_4 = 230,\ B_5 = 100;$

$$C = \begin{Vmatrix} 9 & 8 & 12 & 10 & 9 \\ 13 & 15 & 10 & 7 & 12 \\ 14 & 20 & 8 & 18 & 9 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 22*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 300,\ A_2 = 250,\ A_3 = 400;$

$B_1 = 120,\ B_2 = 130,\ B_3 = 320,\ B_4 = 200,\ B_5 = 180;$

$$C = \begin{Vmatrix} 12 & 10 & 12 & 18 & 10 \\ 20 & 9 & 15 & 20 & 14 \\ 15 & 8 & 10 & 12 & 9 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 23*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 120,\ A_2 = 250,\ A_3 = 180;$

$B_1 = 90,\ B_2 = 100,\ B_3 = 80,\ B_4 = 150,\ B_5 = 180;$

$$C = \begin{Vmatrix} 5 & 8 & 6 & 10 & 6 \\ 12 & 7 & 5 & 10 & 9 \\ 8 & 10 & 8 & 9 & 10 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 24*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 220,\ A_2 = 300,\ A_3 = 480;$

$B_1 = 100,\ B_2 = 125,\ B_3 = 165,\ B_4 = 120,\ B_5 = 300;$

$$C = \begin{Vmatrix} 6 & 10 & 9 & 8 & 10 \\ 8 & 9 & 5 & 7 & 8 \\ 10 & 9 & 9 & 6 & 12 \end{Vmatrix}$$

*Вариант 25*

$n=3,\ m=5;$

$A_1 = 120,\ A_2 = 350,\ A_3 = 225;$

$B_1 = 200,\ B_2 = 115,\ B_3 = 100,\ B_4 = 100,\ B_5 = 200;$

$$C = \begin{Vmatrix} 15 & 10 & 12 & 16 & 11 \\ 10 & 9 & 14 & 12 & 15 \\ 7 & 14 & 10 & 18 & 13 \end{Vmatrix}$$

## 2.3. Задание 3

***Тема задания:*** «Целочисленное линейное программирование».

***Цели задания:***

1. *Понимать смысл, различать, осознанно использовать следующие понятия:* математическая модель задачи целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП); допустимая область решения ЗЦЛП; правильное отсечение в методе Гомори; релаксированная ЗЦЛП, разбиение множества реше-

ний релаксированной ЗЦЛП на подмножества, оценка подмножества решений, дерево решений, рекорд – в методе ветвей и границ для ЗЦЛП.

2. *Получить навыки, уметь:* строить математические модели ЗЦЛП; использовать различные методы для решения ЗЦЛП; анализировать полученное решение и находить альтернативные варианты при решении любым методом; интерпретировать полученные результаты в терминах решаемой задачи.

***Условие задачи.***

Коммерческая фирма закупила товары четырех видов по 10 упаковок каждого за пределами своего города. Доставку товаров предполагается осуществить собственным автофургоном грузоподъемностью $V$ кг за несколько рейсов. Вес одной упаковки товара каждого вида равен соответственно $v_1$, $v_2$, $v_3$ и $v_4$ кг, а стоимость – $c_1$, $c_2$, $c_3$ и $c_4$ тысяч рублей.

Определить, какие виды товаров и в каком количестве необходимо перевезти первым рейсом, с тем, чтобы их стоимость была максимальной.

***Задание.***

1. Записать математическую модель задачи.

2. Решить задачу методом Гомори.

3. Решить задачу с помощью ПЭР любым возможным методом, опираясь на результаты лабораторной работы №3 или №4, и сравнить результаты решения с результатами, полученными вручную.

***Варианты заданий*** (табл. 9).

Таблица 9

| № п/п | $V$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 69 | 15 | 12 | 9 | 7 | 46 | 35 | 30 | 20 |
| 2 | 46 | 8 | 5 | 7 | 6 | 50 | 45 | 47 | 51 |
| 3 | 93 | 7 | 9 | 12 | 8 | 28 | 43 | 51 | 34 |
| 4 | 96 | 8 | 10 | 14 | 18 | 25 | 32 | 45 | 50 |
| 5 | 85 | 7 | 14 | 13 | 15 | 15 | 48 | 33 | 50 |
| 6 | 99 | 12 | 15 | 9 | 10 | 64 | 87 | 35 | 48 |
| 7 | 95 | 11 | 9 | 7 | 15 | 52 | 47 | 35 | 64 |
| 8 | 87 | 6 | 5 | 10 | 9 | 30 | 25 | 45 | 35 |
| 9 | 78 | 12 | 15 | 9 | 7 | 35 | 40 | 25 | 15 |

Окончание таблицы 9

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 81 | 7 | 11 | 9 | 8 | 30 | 48 | 40 | 36 |
| 11 | 60 | 10 | 8 | 6 | 4 | 95 | 80 | 60 | 25 |
| 12 | 51 | 8 | 5 | 7 | 6 | 60 | 45 | 48 | 50 |
| 13 | 97 | 7 | 9 | 12 | 8 | 29 | 44 | 52 | 35 |
| 14 | 87 | 7 | 14 | 13 | 15 | 15 | 50 | 35 | 55 |
| 15 | 99 | 12 | 15 | 9 | 10 | 65 | 88 | 36 | 49 |
| 16 | 95 | 11 | 9 | 7 | 15 | 53 | 48 | 36 | 65 |
| 17 | 94 | 6 | 10 | 8 | 15 | 15 | 25 | 20 | 35 |
| 18 | 99 | 12 | 9 | 15 | 14 | 52 | 37 | 75 | 60 |
| 19 | 74 | 9 | 6 | 8 | 10 | 45 | 27 | 42 | 50 |
| 20 | 81 | 5 | 9 | 6 | 7 | 15 | 35 | 20 | 30 |
| 21 | 70 | 8 | 6 | 7 | 5 | 18 | 12 | 15 | 10 |
| 22 | 82 | 6 | 10 | 9 | 8 | 20 | 28 | 25 | 26 |
| 23 | 57 | 6 | 9 | 8 | 6 | 25 | 35 | 30 | 20 |
| 24 | 64 | 10 | 12 | 15 | 9 | 32 | 35 | 40 | 30 |
| 25 | 79 | 10 | 7 | 5 | 7 | 40 | 30 | 25 | 35 |

## 2.4. Задание 4

***Тема задания:*** «Задача о коммивояжере».

***Цели задания:***

1. *Понимать смысл, различать, осознанно использовать следующие понятия:* математическая модель задачи о коммивояжере (бродячем торговце); приведенная матрица расстояний, константы приведения, штрафы; множество допустимых решений задачи о коммивояжере, разбиение множества решений на подмножества, оценка подмножества решений, рекорд, дерево решений – в методе ветвей и границ для задачи о коммивояжере.

2. *Получить навыки, уметь:* строить математическую модель задачи о коммивояжере; решать задачу методом ветвей и границ; строить дерево решений; анализировать полученное решение и находить альтернативные варианты; интерпретировать полученные результаты в терминах решаемой задачи.

***Условие задачи.***

Коммивояжер должен объехать шесть городов и вернуться в исходный город. Расстояния между городами заданы матрицей $C = \left\| c_{ij} \right\|_{6\times 6}$, $i \neq j$.

Определить маршрут коммивояжера, следуя которым он побывает в каждом городе только один раз, проехав при этом минимальное расстояние.

***<u>Задание.</u>***

1. Записать математическую модель задачи.
2. Решить задачу методом ветвей и границ.
3. Построить дерево решения.

***<u>Варианты заданий.</u>***

*<u>Вариант 1</u>*

$$C = \begin{Vmatrix} X & 10 & 15 & 12 & 14 & 11 \\ 11 & X & 12 & 8 & 11 & 8 \\ 9 & 12 & X & 14 & 12 & 10 \\ 15 & 14 & 10 & X & 14 & 13 \\ 8 & 15 & 12 & 9 & X & 10 \\ 12 & 13 & 9 & 12 & 12 & X \end{Vmatrix}$$

*<u>Вариант 2</u>*

$$C = \begin{Vmatrix} X & 18 & 12 & 7 & 13 & 9 \\ 22 & X & 18 & 11 & 19 & 15 \\ 19 & 8 & X & 15 & 17 & 10 \\ 22 & 14 & 18 & X & 15 & 17 \\ 11 & 10 & 21 & 9 & X & 19 \\ 18 & 12 & 15 & 10 & 14 & X \end{Vmatrix}$$

*<u>Вариант 3</u>*

$$C = \begin{Vmatrix} X & 25 & 21 & 14 & 18 & 20 \\ 32 & X & 28 & 14 & 18 & 25 \\ 24 & 26 & X & 31 & 28 & 25 \\ 21 & 18 & 22 & X & 25 & 20 \\ 18 & 23 & 32 & 19 & X & 16 \\ 25 & 20 & 25 & 19 & 22 & X \end{Vmatrix}$$

*<u>Вариант 4</u>*

$$C = \begin{Vmatrix} X & 9 & 20 & 11 & 8 & 17 \\ 15 & X & 10 & 10 & 18 & 14 \\ 12 & 8 & X & 9 & 10 & 12 \\ 11 & 20 & 12 & X & 15 & 18 \\ 10 & 9 & 11 & 10 & X & 12 \\ 8 & 11 & 9 & 12 & 16 & X \end{Vmatrix}$$

*<u>Вариант 5</u>*

$$C = \begin{Vmatrix} X & 24 & 27 & 24 & 19 & 22 \\ 32 & X & 28 & 14 & 18 & 25 \\ 24 & 26 & X & 31 & 28 & 25 \\ 21 & 18 & 22 & X & 25 & 20 \\ 18 & 23 & 32 & 19 & X & 16 \\ 25 & 20 & 25 & 19 & 22 & X \end{Vmatrix}$$

*<u>Вариант 6</u>*

$$C = \begin{Vmatrix} X & 8 & 9 & 20 & 15 & 10 \\ 10 & X & 15 & 18 & 8 & 9 \\ 8 & 10 & X & 10 & 15 & 12 \\ 11 & 12 & 8 & X & 12 & 8 \\ 13 & 10 & 10 & 12 & X & 11 \\ 9 & 11 & 12 & 16 & 11 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 7*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 18 & 14 & 19 & 15 & 16 \\ 20 & X & 17 & 14 & 10 & 17 \\ 11 & 20 & X & 25 & 11 & 20 \\ 18 & 13 & 17 & X & 19 & 14 \\ 10 & 21 & 18 & 19 & X & 20 \\ 15 & 14 & 15 & 20 & 16 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 8*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 8 & 20 & 11 & 13 & 12 \\ 12 & X & 10 & 21 & 10 & 15 \\ 14 & 10 & X & 8 & 11 & 10 \\ 12 & 9 & 8 & X & 11 & 9 \\ 18 & 15 & 11 & 10 & X & 12 \\ 15 & 12 & 18 & 9 & 9 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 9*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 15 & 18 & 14 & 15 & 17 \\ 17 & X & 16 & 9 & 19 & 10 \\ 11 & 19 & X & 15 & 13 & 16 \\ 18 & 20 & 11 & X & 19 & 15 \\ 11 & 10 & 9 & 18 & X & 18 \\ 14 & 12 & 9 & 13 & 16 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 10*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 22 & 25 & 21 & 15 & 20 \\ 18 & X & 24 & 21 & 19 & 17 \\ 20 & 18 & X & 19 & 25 & 20 \\ 14 & 25 & 20 & X & 21 & 16 \\ 22 & 25 & 19 & 18 & X & 21 \\ 16 & 20 & 15 & 20 & 17 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 11*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 22 & 25 & 19 & 21 & 20 \\ 19 & X & 18 & 20 & 22 & 19 \\ 11 & 24 & X & 24 & 22 & 12 \\ 23 & 20 & 18 & X & 13 & 15 \\ 18 & 25 & 24 & 19 & X & 20 \\ 15 & 23 & 20 & 20 & 18 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 12*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 24 & 20 & 16 & 24 & 18 \\ 18 & X & 25 & 18 & 14 & 20 \\ 22 & 22 & X & 22 & 22 & 22 \\ 18 & 21 & 22 & X & 19 & 20 \\ 14 & 20 & 14 & 21 & X & 15 \\ 20 & 22 & 16 & 18 & 20 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 13*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 25 & 24 & 26 & 18 & 21 \\ 17 & X & 16 & 18 & 20 & 15 \\ 18 & 19 & X & 19 & 22 & 20 \\ 28 & 25 & 20 & X & 25 & 21 \\ 17 & 20 & 22 & 24 & X & 22 \\ 25 & 22 & 18 & 20 & 21 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 14*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 22 & 17 & 12 & 28 & 18 \\ 14 & X & 15 & 20 & 25 & 16 \\ 18 & 22 & X & 25 & 23 & 20 \\ 24 & 22 & 23 & X & 24 & 23 \\ 18 & 19 & 18 & 19 & X & 15 \\ 15 & 20 & 16 & 18 & 20 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 15*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 21 & 22 & 19 & 20 & 17 \\ 20 & X & 22 & 23 & 18 & 15 \\ 11 & 24 & X & 15 & 20 & 18 \\ 25 & 14 & 24 & X & 20 & 21 \\ 18 & 17 & 22 & 21 & X & 16 \\ 13 & 15 & 23 & 17 & 18 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 16*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 19 & 15 & 10 & 21 & 12 \\ 18 & X & 13 & 9 & 14 & 8 \\ 9 & 17 & X & 13 & 20 & 11 \\ 17 & 17 & 17 & X & 17 & 17 \\ 8 & 19 & 20 & 9 & X & 10 \\ 10 & 15 & 18 & 9 & 10 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 17*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 15 & 14 & 12 & 10 & 9 \\ 15 & X & 20 & 11 & 18 & 15 \\ 14 & 20 & X & 18 & 20 & 15 \\ 12 & 11 & 18 & X & 19 & 18 \\ 10 & 18 & 20 & 19 & X & 20 \\ 9 & 15 & 15 & 18 & 20 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 18*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 9 & 12 & 17 & 11 & 8 \\ 10 & X & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 9 & 20 & X & 19 & 14 & 15 \\ 19 & 20 & 10 & X & 14 & 16 \\ 12 & 9 & 19 & 8 & X & 10 \\ 14 & 12 & 15 & 12 & 13 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 19*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 14 & 18 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & X & 10 & 12 & 15 & 13 \\ 10 & 10 & X & 11 & 12 & 11 \\ 17 & 10 & 9 & X & 14 & 18 \\ 14 & 17 & 8 & 20 & X & 10 \\ 15 & 15 & 17 & 17 & 13 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 20*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 15 & 10 & 11 & 9 & 12 \\ 14 & X & 17 & 20 & 15 & 8 \\ 13 & 14 & X & 17 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 8 & X & 15 & 13 \\ 18 & 10 & 8 & 19 & X & 17 \\ 15 & 13 & 9 & 16 & 9 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 21*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 10 & 17 & 9 & 12 & 14 \\ 15 & X & 9 & 11 & 15 & 9 \\ 12 & 9 & X & 10 & 14 & 13 \\ 16 & 14 & 12 & X & 15 & 13 \\ 15 & 14 & 16 & 10 & X & 12 \\ 14 & 15 & 12 & 13 & 16 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 22*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 21 & 25 & 22 & 26 & 20 \\ 22 & X & 25 & 20 & 23 & 19 \\ 24 & 23 & X & 22 & 24 & 22 \\ 25 & 23 & 26 & X & 24 & 21 \\ 27 & 25 & 23 & 26 & X & 24 \\ 22 & 20 & 25 & 26 & 21 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 23*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 15 & 10 & 17 & 12 & 18 \\ 14 & X & 16 & 13 & 17 & 12 \\ 11 & 10 & X & 15 & 12 & 14 \\ 16 & 12 & 11 & X & 10 & 12 \\ 15 & 16 & 13 & 18 & X & 12 \\ 14 & 13 & 17 & 16 & 10 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 24*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 17 & 12 & 19 & 21 & 13 \\ 15 & X & 20 & 19 & 22 & 14 \\ 15 & 18 & X & 21 & 20 & 16 \\ 14 & 13 & 18 & X & 12 & 19 \\ 17 & 16 & 18 & 12 & X & 15 \\ 18 & 20 & 14 & 15 & 19 & X \end{Vmatrix}$$

*Вариант 25*

$$C=\begin{Vmatrix} X & 20 & 14 & 15 & 12 & 22 \\ 15 & X & 19 & 21 & 17 & 18 \\ 12 & 18 & X & 13 & 16 & 12 \\ 14 & 15 & 17 & X & 13 & 19 \\ 18 & 15 & 18 & 14 & X & 15 \\ 18 & 14 & 13 & 21 & 20 & X \end{Vmatrix}$$

## 2.5. Задание 5

***Тема задания:*** «Динамическое программирование».

***Цели задания:***

1. *Понимать смысл, различать, осознанно использовать следующие понятия:* модель динамического программирования (ДП), фазовое пространство, фазовые координаты; параметры состояний, уравнения состояний; управление, оптимальное управление, принцип оптимальности Беллмана, функциональные уравнения ДП.

2. *Получить навыки, уметь:* строить модели ДП; формировать рекуррентные соотношения для решения задачи методом ДП; решать задачи методом ДП, анализировать полученное решение и находить альтернативные варианты; интерпретировать полученные результаты в терминах решаемой задачи.

***Условие задачи.***

Предприятие производит продукцию (станки), спрос на которую в каждый из месяцев известен и составляет $s_t \left(t = 1 \ldots T\right)$ единиц. Запас продукции на складе предприятия на начало планируемого периода равен $I_0$ единиц. В начале каждого месяца, в котором выпускается продукция, требуется переналадка оборудования, затраты на которую равны $p$. Затраты на производство единицы продукции равны $c$, а затраты на ее хранение – $h$. Складские площади предприятия ограничены, и хранить можно не более $M$ единиц продукции. Производственные мощности также ограничены, и в каждом месяце можно изготовить не более $B$ единиц продукции.

Определить производственную программу изготовления продукции $X = \left(x_1, x_2, \ldots x_T\right)$, удовлетворяющую спрос в каждом из месяцев планируемого периода и обеспечивающую минимальные затраты на производство продукции и содержание запасов. Запас продукции на складе в конце планируемого периода должен быть равен нулю. Планируемый период $T$ составляет 4 месяца.

***Задание.***

1. Записать уравнения состояний и указать параметры состояний для решения задачи методом ДП.

2. Записать соответствующие функциональные уравнения Беллмана.

3. Найти решение задачи.

4. Решить задачу с помощью ПЭР и сравнить результаты решения с результатами, полученными вручную (см. «Лабораторная работа №4»).

***Варианты заданий*** (табл. 10).

Таблица 10

| № п/п | $I_0$ | B | M | c | h | p | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 9 | 7 | 6 | 1 | 8 | 5 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 7 | 5 | 7 | 2 | 10 | 8 | 6 | 8 | 6 |
| 3 | 2 | 8 | 6 | 5 | 2 | 6 | 7 | 5 | 7 | 4 |
| 4 | 4 | 6 | 5 | 6 | 3 | 8 | 5 | 6 | 5 | 4 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 6 | 5 | 7 |

Окончание таблицы 10

| № п/п | $I_0$ | B | M | c | h | p | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 8 | 5 | 4 | 1 | 9 | 5 | 7 | 8 | 6 |
| 7 | 4 | 6 | 5 | 6 | 3 | 8 | 5 | 7 | 5 | 4 |
| 8 | 1 | 6 | 4 | 5 | 2 | 8 | 6 | 6 | 5 | 4 |
| 9 | 4 | 8 | 5 | 4 | 1 | 9 | 5 | 7 | 8 | 6 |
| 10 | 3 | 9 | 7 | 6 | 1 | 8 | 5 | 4 | 5 | 6 |
| 11 | 3 | 7 | 5 | 7 | 2 | 9 | 8 | 6 | 8 | 6 |
| 12 | 2 | 8 | 6 | 5 | 2 | 6 | 7 | 5 | 7 | 6 |
| 13 | 2 | 9 | 5 | 6 | 3 | 7 | 5 | 9 | 7 | 6 |
| 14 | 5 | 7 | 9 | 8 | 6 | 5 | 7 | 9 | 7 | 8 |
| 15 | 1 | 6 | 8 | 5 | 2 | 6 | 4 | 6 | 5 | 7 |
| 16 | 2 | 7 | 7 | 6 | 8 | 7 | 8 | 6 | 7 | 8 |
| 17 | 2 | 10 | 7 | 4 | 3 | 10 | 7 | 9 | 6 | 8 |
| 18 | 3 | 11 | 8 | 5 | 4 | 11 | 8 | 10 | 9 | 6 |
| 19 | 4 | 9 | 6 | 3 | 1 | 9 | 6 | 8 | 5 | 7 |
| 20 | 5 | 6 | 4 | 6 | 2 | 8 | 7 | 8 | 6 | 7 |
| 21 | 4 | 8 | 7 | 5 | 1 | 8 | 6 | 7 | 5 | 8 |
| 22 | 3 | 3 | 4 | 6 | 5 | 2 | 7 | 5 | 4 | 8 |
| 23 | 1 | 3 | 5 | 8 | 5 | 6 | 6 | 3 | 5 | 8 |
| 24 | 2 | 6 | 4 | 7 | 2 | 9 | 7 | 2 | 4 | 9 |
| 25 | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 4 | 5 | 4 |

# 3. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

## 3.1. Основные сведения о Пакете Экономических Расчетов

Для выполнения лабораторных работ используются средства Пакета Экономических Расчетов (ПЭР).

ПЭР предназначен для решения ряда экономико-математических задач (всего 14 типов) на компьютерах. Пакет реализован в DOS, но может работать под управлением операционной системы WINDOWS (не младше WINDOWS/98).

Основным меню, содержащим перечисление всех решаемых задач, является программное меню. С его помощью осуществляется выбор конкретной задачи (рис. 3.1).

Для всех типов задач в пакете предусмотрены однотипные функциональные меню. Пользователю предоставляется возможность ввода новой задачи по шаблону с клавиатуры; сохранение задачи в файле и вызов ее; просмотр, корректировка и распечатка входных данных; проведение расчетов с возможностью пошагового вывода промежуточных результатов; просмотр и распечатка полученного решения.

На рис.3.2 приведен пример функционального меню.

| **ПРИГЛАШАЕТ ПЭР (ПАКЕТ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ)!**<br>ПОМНИТЕ: F10 – конец; F9 – возврат в данное меню; F8 – печать текущего экрана | |
|---|---|
| **Код Программа** | **Код Программа** |
| 1 – Линейное программирование | 9 – Управление запасами |
| 2 – Целоч. линейное программирование | A – Теория очередей |
| 3 – Транспортная задача | B – Теория массового обслуживания |
| 4 – Задача о назначении | C – Теория вероятностных решений |
| 5 – Сетевое моделирование | D – Марковский процесс |
| 6 – Сетевое планирование – CPM | E – Временные ряды |
| 7 – Сетевое планирование – PERT | |
| 8 – Динамическое программирование | !! – КОНЕЦ РАБОТЫ! |

Рис. 3.1. Вид программного меню

**РАБОТАЕТ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАМ-Е (LP) СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕН.!**
Следующие опции для LP доступны:
F10 – конец; F9 – выход в меню программ; F8 – печать текущего экрана

| **Опция** | | **Функция** |
|---|---|---|
| 1 | –––– | ОБЗОР ДЛЯ LP СИСТЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ |
| 2 | –––– | ВВОД новой задачи |
| 3 | –––– | ЧТЕНИЕ существующей задачи с диска |
| 4 | –––– | ВЫВОД и/или ПЕЧАТЬ входных данных |
| 5 | –––– | РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ |
| 6 | –––– | СОХРАНЕНИЕ задачи на диске |
| 7 | –––– | КОРРЕКТИРОВКА |
| 8 | –––– | ВЫВОД и/или ПЕЧАТЬ окончательного решения |
| 9 | –––– | ВОЗВРАТ в меню программ |
| 0 | –––– | КОНЕЦ работы! |

Рис. 3.2. Функциональное меню для задачи линейного программирования.

## 3.2. Лабораторная работа №1

## ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

***<u>Цель работы:</u>***

– приобрести практические навыки и опыт решения задач линейного программирования с помощью ПК;

– углубить представление о свойствах и особенностях решения пары двойственных задач;

– научиться проводить анализ устойчивости решения ЗЛП и двойственных оценок аналитическими методами.

***<u>Теоретические основы.</u>***

1. Рассматривается ЗЛП в симметричной форме:

$$f\left(\overline{x}\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1\ldots m, \\ x_j \ge 0, \quad j=1\ldots n. \end{cases} \tag{1.2}$$

2. Двойственная задача будет иметь вид:

$$g\left(\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \tag{1.3}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} i\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \ge c_j, \quad j=1\ldots n, \\ y_i \ge 0, \quad i=1\ldots m. \end{cases} \tag{1.4}$$

3. Согласно первой теореме двойственности, если задачи имеют оптимальные решения соответственно $\overline{x^*}=\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ и $\overline{y^*}=\left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$, то

$$f\left(\overline{x^*}\right)=g\left(\overline{y^*}\right).$$

4. Если под $b_i\left(i=1\ldots m\right)$ понимать объемы некоторых ресурсов, то $y_i^*\left(i=1\ldots m\right)$ являются оценками этих ресурсов.

5. Двойственные оценки $\overline{y^*}=\left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right)$ можно использовать для экономического анализа решения исходной задачи при условии, что ограничения на ресурсы изменяются в определенных пределах. В этой связи говорят о допустимом интервале устойчивости оценок.

Интервал устойчивости оценок по отношению к $i$-му ограничению (ресурсу) имеет вид:

$$\left[b_i - \Delta b_i^{\text{н}};\quad b_i + \Delta b_i^{\text{в}}\right],\quad i = 1 \ldots m, \tag{1.5}$$

где $\Delta b_i^{\text{н}}$ – нижний предел уменьшения, а $\Delta b_i^{\text{в}}$ – верхний предел увеличения, определяемые по формулам:

$$\Delta b_i^{\text{н}} = \min_{j:d_{ji}>0}\left\{\frac{x_j^*}{d_{ji}}\right\};\qquad \Delta b_i^{\text{в}} = \min_{j:d_{ji}<0}\left|\left\{\frac{x_j^*}{d_{ji}}\right\}\right|.$$

Здесь $\left\|d_{ij}\right\| = A_{\text{баз}}^{-1}$ – матрица, обратная к матрице коэффициентов при базисных переменных в оптимальном плане (получается из элементов последней симплексной таблицы при $i = 1 \ldots m$, $j = n+1 \ldots n+m$, причем строки необходимо рассматривать в порядке возрастания номеров базисных переменных).

6. Как следует из теоремы об оценках, при изменениях $\Delta b_i$ свободных членов $b_i$ системы ограничений (1.2) в пределах интервалов устойчивости оценок (1.5) соответствующие изменения оптимальных значений целевых функций (1.1) и (1.3) можно определить по формуле

$$\Delta f_{\max}\left(\overline{x}\right) = \Delta g_{\min}\left(\overline{y}\right) = \sum_{i=1}^{m} \Delta b_i y_i^*.$$

7. Целесообразность включения в план новых видов продукции оценивается характеристикой

$$h_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i^* - c_k.$$

Если $h_k < 0$ (это означает, что соответствующее новой переменной ограничение двойственной задачи в найденной оптимальной точке не выполняется), то данный вид продукции после введения в план улучшает его. При $h_k \geq 0$ включение в план данного вида продукции нецелесообразно (соответствующее новой переменной ограничение двойственной задачи не влияет на исходную допустимую область).

8. Пусть имеется возможность приобрести дополнительно $i$-й ресурс в объеме $v_i \left( v_i \le \Delta b_i^{\text{В}}, i = 1 \ldots m \right)$ по цене $p_i$. Данное мероприятие будет эффективным, если оно обеспечит дополнительную прибыль, т.е. если

$$v_i y_i^* - v_i p_i > 0 .$$

***<u>Реализация задачи линейного программирования в ПЭР.</u>***

Задача линейного программирования в ПЭР (модуль LP) решается симплекс-методом с выделением единичной подматрицы (метод искусственного базиса, или симплекс-метод по Данцигу). Если задача имеет ограничения вида «=» или «$\ge$», то вводятся искусственные переменные по М-методу.

Максимальные размеры решаемых задач: 40 основных переменных и 40 ограничений. Переменные всегда принимают неотрицательные значения. Имена переменных могут содержать до 4-х символов; по умолчанию переменным присваиваются имена $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Условие задачи вводится в соответствии с его формулировкой.

При желании с помощью клавиши <F8> в любой момент можно вывести копию текущего экрана на принтер. Кроме того, существуют опции, позволяющие распечатывать решение задачи и результаты анализа его устойчивости, сохранять в памяти компьютера или внешнем носителе задачу и восстанавливать ее, модифицировать данные задачи и задавать режим вывода шагов симплекс-метода в процессе решения задачи.

При небольшой размерности задачи, когда общее число переменных (включая дополнительные и искусственные) и ограничений меньше 10, можно получить полную картину процесса решения, осуществляя вывод на экран всех симплексных таблиц. В противном случае на экран выводится только основная информация об итерациях и конечное решение.

В ПЭР реализован режим, позволяющий осуществить анализ устойчивости решения и двойственных оценок при изменении коэффициентов целевой функции (1.1) и свободных членов системы ограничений (1.2) соответственно.

***Задание к лабораторной работе.***

Ознакомиться с работой ПЭР. Для этого:

- запустить файл *startper.bat*;
- следуя подсказкам системы, войти в программное меню;
- выбрать режим «Линейное программирование» и войти в него;
- ознакомиться с правилами работы в режиме (опция 1 функционального меню «Обзор для LP системы принятия решений»).

2. Ввести условия задачи №1 курсового проекта по своему варианту. Для этого:

- выбрать в функциональном меню опцию 2 «Ввод новой задачи»;
- по запросу системы ввести условия задачи в соответствии с построенной моделью.

3. Решить задачу симплекс-методом (опция 5 функционального меню «Решение задачи»).

4. Выписать конечную симплексную таблицу и произвести анализ устойчивости двойственных оценок по отношению к ограничениям по видам ресурсов без использования средств ПЭР (см. п.6 теоретической части).

5. Убедиться в правильности определения интервалов устойчивости оценок с помощью ПЭР[1].

6. Определить, не решая задачи заново (см. п.6 теоретической части), на какую величину изменится максимальная прибыль фирмы при изменении суммы затрат на закупку продовольствия на ***Z*** рублей, а площадей для его хранения – на ***D*** кв.м. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений на величину максимальной прибыли. Данные для расчета получить у преподавателя.

[1] Вы также можете проверить правильность анализа устойчивости решения исходной задачи по отношению к коэффициентам целевой функции, выполненного в рамках курсового проекта.

7. Оценить целесообразность закупки шестого вида продовольствия, покупная цена которого равна $\boldsymbol{s_6}$ рублей за кг, площадь, необходимая для хранения, – $\boldsymbol{v_6}$ кв. метров на кг, а прибыль от реализации – $\boldsymbol{p_6}$ рублей за кг (см. п.7 теоретической части).

8. Оценить целесообразность аренды дополнительных холодильных камер площадью $\boldsymbol{V_{доп}}$ кв.м по цене $\boldsymbol{c}$ рублей (см. п.8 теоретической части).

9. Ввести задачу, двойственную к исходной, и решить ее средствами ПЭР. Определить значения переменных и оценок и сравнить их с результатами, полученными при решении исходной задачи.

***Содержание отчета.***

1. Цель работы.
2. Условие задачи и исходные данные.
3. Математические модели исходной и двойственной задач с числовыми данными.
4. Последняя симплексная таблица исходной задачи.
5. Оптимальные решения пары задач.
6. Допустимые интервалы устойчивости оценок с расчетами.
7. Расчеты по пп. 6, 7, 8 задания к лабораторной работе.
8. Решение и анализ устойчивости двойственной задачи.
9. Выводы по работе.

***Контрольные вопросы.***

1. Чем определяется число переменных и число ограничений двойственной задачи?
2. В каком случае двойственная задача будет содержать ограничения в форме равенств?
3. В каком случае на переменные двойственной задачи не накладываются ограничения по знаку?
4. Каков смысл элементов целевой строки в симплексной таблице?

5. Как по последней симплексной таблице определить, имеет ли задача альтернативное решение?

6. Если задача имеет не единственное решение, как получить альтернативное решение?

7. Как в последней симплексной таблице найти решение двойственной задачи?

8. Чем определяются границы устойчивости решения задачи?

9. Чем определяются границы устойчивости оценок?

10. При каких условиях можно не решая задачи определить величину изменения целевой функции при изменении правых частей ограничений?

## 3.3. Лабораторная работа №2

## ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

***Цель работы:***

– приобрести практические навыки и опыт решения транспортной задачи линейного программирования в матричной постановке с помощью ПК;

– научиться находить возможные варианты решения и анализировать полученные результаты;

– видеть связь между транспортной задачей и общей задачей линейного программирования;

– видеть связь между различными моделями транспортной задачи.

***Теоретические основы.***

1. Рассматривается классическая транспортная задача по критерию стоимости в матричной постановке:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1\ldots n, \\
\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1\ldots m, \\
x_{ij} \ge 0, \quad i = 1\ldots n, j = 1\ldots m,
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

где $n$ – число поставщиков однородного груза, $m$ – число потребителей этого же груза, $a_i$ – запас груза у $i$-го поставщика (мощность поставщика), $b_j$ – спрос $j$-го потребителя (мощность потребителя), $c_{ij}$ – стоимость (коэффициент затрат) перевозки единицы груза от $i$-го поставщика $j$-му потребителю, $x_{ij}$ – количество груза, перевозимого от $i$-го поставщика $j$-му потребителю.

2. Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы суммарная мощность всех поставщиков равнялась суммарной мощности всех потребителей, т.е.

$$
\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j. \tag{2.3}
$$

Если условие (2.3) выполняется, модель ТЗ называется *закрытой*, в противном случае – *открытой*.

3. Если модель ТЗ является открытой, необходимо добавить к условиям задачи:

– дополнительного (фиктивного) поставщика с мощностью

$$
a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \text{, если } \sum_{j=1}^{m} b_j > \sum_{i=1}^{n} a_i;
$$

– дополнительного (фиктивного) потребителя с мощностью

$$
b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j \text{, если } \sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j .
$$

Коэффициенты затрат для фиктивного поставщика или потребителя принимаются равными 0.

4. Решение ТЗ осуществляется в рамках так называемой транспортной таблицы. Основным методом решения является метод потенциалов, основанный на принципе двойственности задач линейного программирования.

5. Двойственная задача для классической транспортной задачи (2.1) –(2.2) будет иметь вид:

$$g(\bar{u},\bar{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j \to \max \tag{2.4}$$

при ограничениях

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \quad i = 1\ldots n,\ j = 1\ldots m. \tag{2.5}$$

Переменные двойственной задачи $u_i \left(i = 1\ldots n\right)$ и $v_j \left(j = 1\ldots m\right)$ называются п о т е н ц и а л а м и соответственно строк и столбцов транспортной таблицы. Величина $E_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ называется х а р а к т е р и с т и к о й клетки транспортной таблицы, стоящей на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца.

Условием оптимальности решения ТЗ является отсутствие отрицательных характеристик, т.е. выполнение ограничений (2.5) для всех клеток транспортной таблицы.

Если критерием оптимизации является максимум, то очевидно, что условием оптимальности будет отсутствие положительных характеристик клеток транспортной таблицы.

6. Математическая модель задачи о назначениях имеет следующий вид:

$$f\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1\ldots n, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1\ldots m, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1\ldots n, \; j = 1\ldots m, \\ x_{ij} - \text{целые}, \; i = 1\ldots n, \; j = 1\ldots m, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $n$ – число заданий (работ), $m$ – число объектов (исполнителей), $c_{ij}$ – эффективность (прибыль) от назначения $i$-го объекта на $j$-е задание, $x_{ij}$ – так называемая альтернативная переменная, принимающая значение 1, если $i$-й объект назначается на $j$-е задание, и значение 0 – в противном случае.

Достижение альтернативных значений переменных в оптимальном решении обеспечивается системой ограничений (2.6).

7. Задача о назначениях может рассматриваться как частный случай транспортной задачи, в которой мощность каждого поставщика и каждого потребителя является единичной: $a_i = b_j = 1, \; i = 1\ldots n, j = 1\ldots m$.

8. Для разрешимости поставленной задачи требуется, чтобы число заданий равнялось числу объектов: $m = n$. В силу утверждения 7 это требование равнозначно условию закрытости модели.

Если в исходной задаче $m \neq n$, необходимо добавить к условиям задачи:

– $m - n$ дополнительных (фиктивных) заданий, если $n < m$,

– $n - m$ дополнительных (фиктивных) объектов, если $n > m$.

Эффективность для дополнительных заданий или объектов принимается равной 0.

9. Любое опорное решение задачи о назначениях является вырожденным, так как представляет собой сильно разреженную квадратную матрицу, в каждой строке и в каждом столбце которой содержится ровно по одному единичному элементу.

***Реализация транспортной задачи в ПЭР.***

Решение транспортной задачи в ПЭР (модуль TRP) осуществляется методом потенциалов, или модифицированным распределительным методом (Modifyed distribution – MODI). Для поиска первоначального опорного решения может быть выбран либо метод северо-западного угла, либо метод аппроксимации Фогеля (Vogel's Approximation method – VAM).

Программа предназначена для решения транспортных задач, содержащих до 50 поставщиков и 50 потребителей. Если общая мощность поставщиков не равна общей мощности потребителей, т.е. модель ТЗ является открытой, то фиктивный поставщик или потребитель добавляются программой автоматически. Мощности поставщиков и потребителей должны быть целыми положительными числами, коэффициенты затрат – действительными величинами.

При решении небольших задач (до 4 поставщиков и 5 потребителей) существует возможность вывода на экран каждой итерации вычислительного процесса. В противном случае на экран выводится только конечное (оптимальное) решение.

***Задание к лабораторной работе.***

1. Войти в режим решения ТЗ в ПЭР. Для этого:

- запустить файл *startper.bat*;
- следуя подсказкам системы, войти в программное меню;
- выбрать режим «Транспортная задача» и войти в него;
- ознакомиться с правилами работы в режиме (опция 1 функционального меню «Обзор для TRP системы принятия решений»).

2. Ввести условия задачи №2 курсового проекта по своему варианту. Для этого:

- выбрать в функциональном меню опцию 2 «Ввод новой задачи»;
- по запросу системы ввести условия задачи в соответствии с построенной моделью.

3. Решить задачу методом потенциалов (опция 5 функционального меню «Решение задачи») дважды:

• построив первоначальный опорный план методом северо-западного угла (этот режим используется по умолчанию);

• подключив для построения первоначального плана метод аппроксимации Фогеля (VAM).

4. Сравнить результаты решений.

5. Если оптимальное решение не является единственным, рассчитать характеристики клеток последней таблицы и получить вручную хотя бы один альтернативный оптимальный план.

6. Записать ТЗ в виде ОЗЛП и найти ее решение симплекс-методом (режим «Линейное программирование» программного меню ПЭР). Сравнить полученные результаты. Произвести анализ устойчивости решения.

7. Ввести произвольную задачу о назначениях с матрицей эффективности размером 4×4, рассматривая ее как частный случай ТЗ[2]. Решить задачу методом потенциалов.

8. Если оптимальное решение задачи о назначениях не является единственным, рассчитать характеристики клеток последней таблицы и получить вручную хотя бы один альтернативный оптимальный план.

9. Проанализировать, что общего и в чем различие между процессами решения методом потенциалов транспортной задачи и задачи о назначениях в их классической постановке.

***Содержание отчета.***

1. Цель работы.

2. Условие задачи и исходные данные.

3. Математическая модель транспортной задачи с числовыми данными.

4. Опорные планы, построенные методом северо-западного угла и методом Фогеля.

5. Последняя транспортная таблица со значениями потенциалов и характеристик клеток.

---

[2] Условие задачи необходимо сохранить, так как оно понадобится при выполнении лабораторной работы №3.

6. Оптимальный план ТЗ (если их несколько, привести хотя бы два).

7. Модель ТЗ в виде ОЗЛП с числовыми данными.

8. Оптимальный план, полученный симплекс-методом; соответствующие ему двойственные оценки; результаты анализа устойчивости решения.

9. Условие и модель задачи о назначениях с числовыми данными.

10. Первоначальный опорный план задачи, полученный любым методом.

11. Оптимальный план задачи о назначениях (если их несколько, то привести хотя бы два).

12. Выводы по работе.

***<u>Контрольные вопросы.</u>***

1. Что такое открытая и закрытая модели ТЗ?

2. Что показывает «штраф» по строке или по столбцу в методе Фогеля?

3. Какое решение ТЗ называется вырожденным?

4. Как проверить, является ли полученное вырожденное решение опорным?

5. Что показывает характеристика клетки транспортной таблицы?

6. Что является критерием оптимальности решения в методе потенциалов?

7. Что является признаком множественности оптимальных решений?

8. Если полученное оптимальное решение не единственное, как получить альтернативное решение?

9. Как определить значение целевой функции, полученное преобразованием транспортной таблицы по методу потенциалов, без применения формулы (2.1)?

10. Как по транспортной таблице найти решение двойственной задачи?

## 3.4. Лабораторная работа №3

## ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

***<u>Цель работы:</u>***

– приобрести практические навыки и опыт решения задач целочисленного линейного программирования с помощью ПК;

– различать общие и частные задачи ЗЦЛП, выбирать методы решения, анализировать полученные результаты.

***Теоретические основы.***

1. Рассматривается целочисленная или частично целочисленная задача линейного программирования:

$$f\left(\bar{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1 \ldots m, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1 \ldots n, \end{cases} . \tag{3.2}$$

$$x_j \text{ - целые} \tag{3.3}$$

2. Наиболее известным методом решения ЗЦЛП является метод Р.Гомори, или метод правильного отсечения.

При решении ЗЦЛП требование целочисленности переменных вначале игнорируется и с помощью симплекс-метода находится оптимальное решение. Затем, если среди значений переменных в полученном решении есть нецелочисленные, формируется дополнительное ограничение (производится «правильное отсечение»), отсекающее от допустимой области полученную точку, но при этом оставляющее внутри допустимой области все точки с целочисленными координатами. Новое ограничение присоединяется к исходным ограничениям задачи, и полученная расширенная задача снова решается симплекс-методом.

Процесс добавления ограничений продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, отвечающее условиям целочисленности поставленной задачи. Алгоритм Гомори позволяет за конечное число шагов получить такое решение или убедиться в том, что его не существует.

3. Число $\boldsymbol{a}$ называется конгруэнтным числу $\boldsymbol{b}$, если разность $\boldsymbol{a-b}$ есть целое число. Дробной частью числа $\boldsymbol{a}$ называется наименьшее **неотрицательное** число, конгруэнтное числу $\boldsymbol{a}$.

4. Формально метод Гомори заключается в следующем.

В последней симплексной таблице, отвечающей оптимальному решению задачи без учета условия целочисленности переменных, выбирается строка с наибольшей дробной частью базисной переменной (так называемая порождающая строка), и в симплексную таблицу добавляется новая строка, все элементы которой получаются как дробные части соответствующих элементов порождающей строки, взятые со знаком «минус». Кроме того, в таблицу добавляется столбец (дополнительная переменная для нового ограничения, входящая в текущий базис), на пересечении которого с дополнительной строкой стоит **1**, а остальные элементы равны **0**.

Поскольку в результате описанных действий в итоговом столбце симплекс-таблицы появляется отрицательный элемент, но условие оптимальности при этом не нарушается, необходимо выполнить симплексное преобразование, соответствующее второму этапу двойственного симплекс-метода.

5. Поскольку в ПЭР метод Гомори не реализован, для решения ЗЦЛП можно применить режим «Линейное программирование», рассчитывая дополнительные ограничения вручную и преобразовывая их к виду, в котором они будут выражены через исходные переменные.

6. Алгоритмы ветвей и границ – это наиболее широко используемые в настоящее время методы решения не только целочисленных и частично целочисленных задач линейного программирования, но и других дискретных оптимизационных задач. Все они основаны на последовательном разбиении допустимого множества решений на непересекающиеся подмножества (процесс ветвления) и вычислении некоторых оценок (границ) этих подмножеств, позволяющем исключать из рассмотрения подмножества, заведомо не содержащие решений задачи. При этом для задач максимизации определяется оценка подмножества решений сверху, а для задач минимизации – снизу.

Оценка, как правило, вычисляется путем р е л а к с а ц и и , т.е. замены задачи оптимизации функции по некоторому множеству задачей оптимизации по более широкому множеству.

7. Метод ветвей и границ для ЗЦЛП реализуется алгоритмом Л э н д и Д о й г . Оценки сверху вычисляются с помощью релаксации, состоящей в отбрасывании условий (3.3) целочисленности переменных. Получающиеся релаксированные задачи решаются симплекс-методом.

Прежде всего решается задача (3.1) – (3.2). Если полученное решение $\overline{x^1} = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$ удовлетворяет условию (3.3), то ЗЦЛП решена. В противном случае полученное максимальное значение целевой функции (3.1) $f\left(\overline{x^*}\right)$ принимается в качестве оценки сверху всего множества решений. За первоначальный р е к о р д (наилучшее значение целевой функции) принимается $f_{rec}\left(\overline{x}\right) = -\infty$.

Далее на первом шаге алгоритма выбирается любая целочисленная переменная $x_k^1$ $\left(k = 1 \ldots n_1, n_1 < n\right)$, которая в полученном решении имеет нецелочисленное значение, и исходное множество решений релаксированной задачи (3.2) разбивается на два непересекающихся подмножества: первое – с дополнительным ограничением $x_k \le \left[x_k^1\right]$, где $[\ ]$ обозначает целую часть числа, а второе – с дополнительным ограничением $x_k \ge \left[x_k^1\right] + 1$. Таким образом исходная релаксированная задача разветвляется на две подзадачи, для каждой из которых вычисляются оценки сверху. Если ни одна из подзадач не исключается из дальнейшего рассмотрения, для ветвления на втором шаге выбирается подзадача с наибольшей оценкой.

Подзадача может быть исключена из списка кандидатов на ветвление в одном из трех случаев:

а) если допустимое множество данной релаксированной подзадачи пусто;

б) если значение максимума для данной подзадачи не превышает текущего значения рекорда $f_{rec}\left(\overline{x}\right)$;

в) если оптимальное решение данной подзадачи удовлетворяет условию (3.3). В этом случае текущее значение рекорда полагается равным вычисленному значению функции $f\left(\overline{x^1}\right)$, если оно больше предыдущего рекорда.

Все последующие шаги алгоритма аналогичны первому. На каждом шаге из числа кандидатов на ветвление выбирается подзадача с максимальной оценкой.

*Примечание.* Если целевая функция исходной задачи минимизируется, то очевидно, что для каждой подзадачи вычисляются оценки снизу и в качестве рекорда выбирается минимальная из соответствующих целочисленным решениям. В качестве первоначального рекорда в этом случае принимается $f_{rec}\left(\overline{x}\right) = +\infty$.

### ***Реализация задачи целочисленного линейного программирования в ПЭР.***

Решение ЗЦЛП в ПЭР осуществляется программным модулем ILP. Программа может решать как полностью, так и частично целочисленные задачи. Максимальные размеры решаемых задач: 20 основных переменных и 20 ограничений (без учета ограничений на отдельные переменные). Есть возможность определить допустимые значения переменных как альтернативные: 0 или 1.

Решение реализовано посредством метода ветвей и границ.

По желанию пользователя можно вывести на экран все шаги вычислительного процесса или получить только конечное оптимальное решение.

### ***Реализация задачи о назначениях в ПЭР.***

ПЭР содержит специальный программный модуль ASMP для решения задачи о назначениях. Решение осуществляется с помощью венгерского метода. Максимальные размеры решаемых задач: 60 объектов и 60 заданий. Под заданиями можно понимать, например, работы, которые необходимо выполнить, а объекты могут означать исполнителей. Задача может быть решена как по критерию максимизации, так и по критерию минимизации, в зависимости от того, какие коэффициенты – эффективности или затрат – заданы для каждого объекта и задания.

Программа обеспечивает простой формат ввода и корректировки данных. Если число объектов и число заданий не совпадают, программа автоматически добавляет соответствующее число фиктивных заданий или объектов.

Для небольших задач (до 9 объектов и 9 заданий) существует возможность вывода на экран каждой итерации метода.

***Реализация задачи о назначениях в программе Vevger.***

Программа реализует классический венгерский метод для решения задачи о назначениях. Размерность исходной матрицы практически не ограничена, критерий оптимизации– любой: максимум или минимум.

Программа позволяет отследить решение задачи по шагам, причем при установке флажка «Детально» можно получить подробное описание каждого преобразования на каждом шаге. Существует возможность сокращения числа шагов за счет оптимизации процесса расстановки независимых нулей на начальном этапе (флажок «Оптимизация»).

Программа снабжена подробной инструкцией (раздел меню «Справка»), включающей описание алгоритма венгерского метода.

***Задание к лабораторной работе.***

1. Войти в режим решения ЗЦЛП в ПЭР. Для этого:

- запустить файл *startper.bat*;
- следуя подсказкам системы, войти в программное меню;
- выбрать режим «Целочисленное линейное программирование» и войти в него;
- ознакомиться с правилами работы в режиме (опция 1 функционального меню «Обзор для ILP системы принятия решений»).

2. Ввести условия задачи №3 расчетно-графической работы по своему варианту. Для этого:

- выбрать в функциональном меню опцию 2 «Ввод новой задачи»;

• по запросу системы ввести условия задачи в соответствии с построенной моделью.

3. Решить задачу методом ветвей и границ (опция 5 функционального меню «Решение задачи»).

4. Проанализировать процесс решения, построить дерево решения.

5. Решить эту же задачу методом Гомори, используя средства ПЭР. Для этого:

а) выйти из режима «Целочисленное линейное программирование и войти в режим «Линейное программирование»;

б) ввести условие задачи без учета целочисленности переменных;

в) решить задачу симплекс-методом;

г) в последней симплексной таблице выбрать порождающую строку, в которой элемент итогового столбца имеет максимальную дробную часть;

д) по элементам порождающей строки сформировать дополнительное ограничение (см. п.4 теоретической части);

е) выписать выражение для полученного дополнительного ограничения и с учетом исходных ограничений системы и дополнительных переменных преобразовать его к виду, в котором будут присутствовать только основные переменные задачи (другими словами, из исходных ограничений системы; преобразованных в форму равенств, выразить введенные в них дополнительные переменные через основные и подставить полученные выражения в новое ограничение);

ж) выбрать в функциональном меню опцию 7 «Корректировка» и ввести в условия задачи дополнительное ограничение;

з) решить расширенную задачу;

и) если полученное решение снова не окажется целочисленным, повторить шаги г) – и).

6. Сравнить полученное решение с результатом решения методом ветвей и границ.

7. Решить методом ветвей и границ задачу о назначениях, сформированную в лабораторной работе №2, для чего:

- вернуться в режим «Целочисленное линейное программирование»;
- ввести условие задачи о назначениях в виде ЗЦЛП;
- решить задачу;
- сравнить результат с полученным ранее.

8. Решить ту же задачу о назначениях венгерским методом, для этого:

- выйти из ПЭР и войти в программу Venger;
- ознакомиться с правилами работы в программе (меню «Справка»);
- ввести условие задачи;
- осуществить процесс решения с выводом на экран всех его шагов.

9. Ввести условие произвольной задачи о назначениях с матрицей эффективности размером 6×8 (6 объектов, 8 заданий) и решить ее по критерию минимума. Осуществить вывод на экран всех шагов процесса решения и проанализировать этот процесс.

10. Если оптимальное решение не является единственным, то получить вручную альтернативное решение.

***<u>Содержание отчета.</u>***

1. Цель работы.
2. Условие и математическая модель ЗЦЛП с числовыми данными.
3. Дерево решения по методу ветвей и границ.
4. Перечень условно-оптимальных решений и соответствующих им дополнительных ограничений, полученных в процессе решения ЗЦЛП методом Гомори.
5. Оптимальное решение ЗЦЛП.
6. Условие и математическая модель задачи о назначениях.
7. Исходные данные задачи о назначениях с матрицей эффективности размером 4×4.
8. Оптимальное решение задачи о назначениях, полученное методом ветвей и границ.
9. Последовательные преобразования матрицы эффективности в процессе решения задачи венгерским методом.

10. Исходные данные задачи о назначениях с матрицей эффективности размером $6\times8$.

11. Последовательные преобразования матрицы эффективности в процессе решения задачи венгерским методом.

12. Оптимальное решение задачи о назначениях (если их несколько, привести хотя бы два).

13. Выводы по работе.

***<u>Контрольные вопросы.</u>***

1. Что такое правильное отсечение в применении к ЗЦЛП?

2. Почему на этапе добавления ограничения в методе Гомори для перехода к новому решению целесообразнее использовать двойственный симплекс-метод?

3. Что является критерием окончания процесса решения ЗЦЛП в методе ветвей и границ?

4. При выполнении каких условий вершина дерева решений исключается из кандидатов на дальнейшее ветвление?

5. Что такое рекорд в методе ветвей и границ?

6. Целесообразно ли для решения задачи о назначениях использовать метод потенциалов? Почему?

7. Целесообразно ли для решения задачи о назначениях использовать обычные методы, применяемые для решения ЗЦЛП, например, метод Гомори, метод ветвей и границ? Почему?

8. Что является критерием окончания процесса решения задачи о назначениях венгерским методом?

9. Как определить, является ли решение задачи о назначениях, полученное венгерским методом, единственным?

10. Если оптимальное решение задачи о назначениях не является единственным, как получить альтернативное решение?

## 3.5. Лабораторная работа №4

## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

***Цель работы:***

– научиться строить модели динамического программирования для задач различных классов, в которых процесс принятия решений может быть многошаговым;

– правильно определять суть и природу состояний управляемой системы, мероприятий, составляющих управление системой;

– приобрести практические навыки и опыт решения многошаговых задач методом динамического программирования.

***Теоретические основы.***

1. Рассматривается управляемая система, которая под влиянием управления переходит из начального состояния $\xi_0$ в конечное состояние $\xi_n$. Предположим, что процесс управления системой можно разбить на $n$ шагов, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – состояния системы после первого, второго, …, $n$-го шага.

2. Состояние $\xi_k$ системы после $k$-го шага ($k = 1, 2, \ldots, n$) характеризуется параметрами $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(s)}$, которые называются *фазовыми координатами*.

Последовательное (по шагам) преобразование системы достигается с помощью некоторых мероприятий $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые и составляют управление системой $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где $u_k$ – управление на $k$-м шаге, переводящее систему из состояния $\xi_{k-1}$ в состояние $\xi_k$. Управление $u_k$ на $k$-м шаге заключается в выборе значений определенных управляющих переменных $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(r)}$.

При условии отсутствия последействия состояние системы в конце $k$-го шага зависит только от предшествующего состояния системы $\xi_{k-1}$ и управления $u_k$ на $k$-м шаге:

$$\xi_k = \Phi_k\left(\xi_{k-1}, u_k\right), \quad k = 1 \ldots n. \tag{4.1}$$

Равенства (4.1) называются *уравнениями состояния*.

Варьируя управление $U$, получают различную эффективность процесса, которую оценивают количественно целевой функцией $Z$, зависящей от начального состояния системы $\xi_0$ и выбранного управления $U$:

$$Z = F\left(\xi_0, U\right). \tag{4.2}$$

В задаче пошаговой оптимизации целевая функция (4.2) должна быть аддитивной, т.е.

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k\left(\xi_{k-1}, u_k\right), \tag{4.3}$$

где $f_k\left(\xi_{k-1}, u_k\right)$ – показатель эффективности $k$-го шага процесса управления, зависящий от состояния системы $\xi_{k-1}$ в начале этого шага и управления $u_k$, выбранного на этом шаге.

3. В основе метода динамического программирования лежит *принцип оптимальности Беллмана*: оптимальное управление обладает тем свойством, что каково бы ни было начальное состояние системы на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага.

Аналитически этот принцип записывается в виде *основного функционального уравнения ДП*:

$$Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right) = \underset{u_k}{extr}\left\{f_k\left(\xi_{k-1}, u_k\right) + Z_{k+1}^*\left(\xi_k\right)\right\}. \tag{4.4}$$

4. Метод ДП заключается в последовательном применении рекуррентных соотношений (4.4) для всех шагов процесса, начиная с последнего, $n$-го, и заканчивая первым. Тем самым на каждом шаге определяются условно-оптимальные решения. На последнем шаге находится оптимальное решение задачи.

5. **Задача о ранце** формулируется следующим образом.

Требуется загрузить ранец объемом $A$ предметами $n$ типов. Известен объем каждого предмета $a_i$ и его ценность (вес) $c_i$ $\left(i=1\ldots n\right)$. Требуется определить, какие предметы и в каком количестве нужно загрузить в ранец, чтобы суммарная ценность (вес) груза была максимальной.

6. Задача о ранце – типичная задача целочисленного линейного программирования с одним ограничением-неравенством и, как правило, с ограниченными сверху переменными.

Процесс решения задачи методом ДП искусственно разбивается на $n$ этапов (шагов). Под состоянием системы (ранца) $\xi_k$ на $k$-м шаге понимается объем ранца, оставшийся свободным после загрузки предметов $k$ типов. Под управлением $u_k$ на $k$-м шаге понимается число $x_k$ загружаемых предметов $k$-го типа.

Параметры состояния (фазовые координаты) в этом случае определяются следующим образом:

$$\xi_0 = A, \quad \xi_k = A - \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \quad k = 1\ldots n.$$

Уравнения состояний имеют вид:

$$\xi_k = \xi_{k-1} - a_k x_k, \quad k = 1\ldots n.$$

Если обозначить через $Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right)$ условно-оптимальное решение на $k$-м шаге, а через $\hat{x}_k$ – наибольшее возможное значение, которое может принимать $x_k$, то рекуррентные соотношения будут иметь вид:

$$Z_n^*\left(\xi_{n-1}\right) = c_n x_n^*, \quad \text{где } x_n^* = \min(\left[\frac{\xi_{n-1}}{a_n}\right], \hat{x}_n)$$

$$Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right) = \max_{x_k}\left\{c_k x_k + Z_{k+1}^*\left(\xi_{k-1} - a_k x_k\right)\right\}, \quad k = 1\ldots n-1,$$

где $0 \le \xi_{k-1} \le A, \quad 0 \le x_k \le \min(\left[\frac{\xi_{k-1}}{a_k}\right], \hat{x}_k).$

7. **З а д а ч а   д о с т и ж е н и я   ц е л и,** или задача о выборе траектории, формулируется следующим образом.

Дана ориентированная сеть, содержащая $N$ точек (узлов). Требуется найти кратчайший путь из точки 1 в точку $N$, если задана матрица $\left\| a_{ij} \right\|$ расстояний из точки $i$ в точку $j$ $\left( i = 1 \ldots N - 1,\ j \quad 1 \ldots N, = a_{ij} \quad 0 \right)$. Если какие-либо точки $l$ и $m$ не соединены дугами, следует считать, что соответствующие расстояния являются сколь угодно большими: $a_{lm} = \infty$.

8. Динамическая модель выбора кратчайшего пути строится следующим образом.

Все точки сети условно делятся на $n$ множеств, где $n$ – максимальное число дуг в пути, связывающем точку 1 с точкой $N$. К множеству $\xi_0$ относят точку 1 (исходное состояние системы), к множеству $\xi_1$ – точки, из которых можно попасть в $N$ не более, чем за $n-1$ шагов, к множеству $\xi_2$ – точки, из которых можно попасть в $N$ не более, чем за $n-2$ шага, и т.д.

Считается, что система находится в состоянии $\xi_k$, если рассматривается некоторая точка $i$, принадлежащая множеству $\xi_k$, из которой можно попасть в точку $N$ не более, чем за $n-k$ шагов. Под управлением $u_k$ на $k$-м шаге понимается точка $j$, принадлежащая множеству $\xi_{k+1}$, в которую можно перейти из точки $i$ за один шаг.

Если обозначить через $Z_k^*(i)$ кратчайший путь из точки $i$ в точку $N$, то рекуррентные соотношения запишутся следующим образом:

$Z_n^*(i) = a_{iN}$, здесь $u_n^* = N$,

$Z_k^*(i) = \min\left\{ a_{ij} + Z_{k+1}^*(j) \right\}$, где $i \in \xi_{k-1}$, $j \in \xi_{\overline{k}}$, $k \quad 1 \ldots n-1$.

9. **З а д а ч а   о   в ы б о р е   о п т и м а л ь н о й   т р а е к т о р и и   с а м о л е т а** является частным случаем задачи достижения цели и формулируется следующим образом.

Самолет, находящийся на высоте $H_0$ и имеющий скорость $V_0$, должен подняться на высоту $H_n$ и набрать скорость $V_m$. Известен расход горючего при подъеме самолета с любой высоты $H_i$ на любую высоту $H_j\left(H_j > H_i\right)$ при постоянной скорости, а также расход горючего при увеличении скорости от любого значения $V_k$ до любого значения $V_l\left(V_l > V_k\right)$ при неизменной высоте. Требуется найти оптимальное управление набором высоты и скорости, при котором общий расход горючего будет минимальным.

10. В задаче состояние системы (самолета) характеризуется двумя параметрами: скоростью $V$ и высотой $H$. Фазовым пространством (областью допустимых состояний) является прямоугольник на плоскости $V0H$, ограниченный прямыми $V = V_0, H = H_0, V = V_m, H = H_n$. Чтобы найти решение методом ДП, отрезок $\left(H_n - H_0\right)$ разбивают на $t_1$ равных частей (шагов), а отрезок $\left(V_m - V_0\right)$ – на $t_2$ равных частей и считают, что за один шаг самолет может увеличить либо высоту на величину $\Delta H = \dfrac{H_n - H_0}{t_1}$, либо скорость на величину $\Delta V = \dfrac{V_m - V_0}{t_2}$.

Очевидно, что существует множество траекторий (управлений) в фазовом пространстве, представляющих собой ломаные линии (рис.3), по которым самолет может переместиться из точки $\left(V_0 H_0\right)$ в точку $\left(V_m H_n\right)$. Решение задачи состоит в том, чтобы из множества управлений выбрать такое, которое позволит минимизировать общий расход горючего, суммирующий расходы горючего на каждом отрезке (шаге) соответствующей траектории.

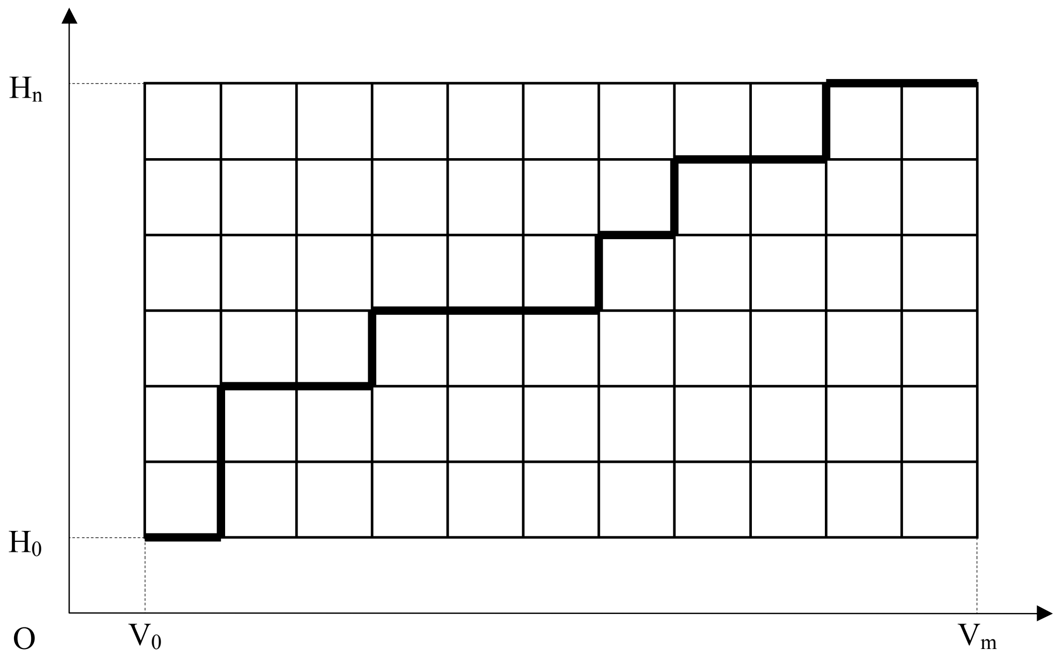


Рис. 3.3. Траектория самолета в фазовом пространстве.

11. Точная формулировка **задачи управления запасами** зависит от конкретных условий. При этом под запасами понимаются любые денежные или материальные ценности, которые периодически пополняются (производятся, доставляются и т.д.) и некоторое время сохраняются с целью расходования их в последующие промежутки времени. Уровень запасов в любой момент времени определяется начальным уровнем запасов плюс пополнение и минус расход за промежуток времени от начального момента до текущего.

12. Рассматривается задача в формулировке, приведенной в задании 5 к курсовому проекту.

13. Процесс принятия решения естественным образом распадается на этапы, число которых $n$ равно числу месяцев $T$ в планируемом периоде. Состояние $\xi_k$ динамической системы (производственного процесса) на $k$-м этапе определяется запасом продукции на складе к началу этого этапа (месяца) , а под управлением на $k$-м этапе понимается количество продукции $x_k$, которое планируется выпустить на данном этапе.

Параметры состояний в этом случае описываются соотношениями

$$\xi_0 = I_0, \quad \xi_k = I_0 + \sum_{j=1}^{k}\left(x_j - s_j\right),$$

а уравнения состояний будут иметь вид

$$\xi_k = \xi_{k-1} + x_k - s_k .$$

Рекуррентные соотношения записываются в следующем виде

$$Z_n^*\left(\xi_{n-1}\right) = p \cdot sign\left(x_n^*\right) + c \cdot x_n^*, \text{ где } x_n^* = s_n - \xi_{n-1},$$

$$Z_k^*\left(\xi_{k-1}\right) = \min_{x_k}\left\{p \cdot sign\left(x_k\right) + c \cdot x_k + h \cdot \xi_k + Z_{k+1}^*\left(\xi_k\right)\right\}, \quad k = 1 \ldots n-1,$$

где $\max\left\{0, \sum_{j=k}^{n}(s_j - B)\right\} \le \xi_{k-1} \le \min\left\{M, \sum_{j=k}^{n} s_j\right\},$

$$\max\left\{0, s_k - \xi_{k-1}\right\} \le x_k \le \min\left\{B, M + s_k - \xi_{k-1}, \sum_{j=k}^{n} s_j - \xi_{k-1}\right\},$$

$$sign\left(x\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

***<u>Задание к лабораторной работе.</u>***

1. Войти в режим решения задач методом динамического программирования в ПЭР. Для этого:

- запустить файл *startper.bat*;
- следуя подсказкам системы, войти в программное меню;
- выбрать режим «Динамическое программирование» и войти в него;
- ознакомиться с правилами работы в режиме (опция 1 функционального меню «Обзор для DP системы принятия решений»).

2. Ввести условия задачи №3 расчетно-графической работы по своему варианту. Для этого:

- выбрать в функциональном меню опцию 2 «Ввод новой задачи»;

• по запросу системы ввести условия задачи в соответствии с построенной моделью.

3. Решить задачу (опция 5 функционального меню «Решение задачи»).

4. Проанализировать процесс решения. Сравнить результат с результатами решения задачи методом Гомори и методом ветвей и границ. Если результаты не совпадают, объяснить причину.

5. Ввести условие задачи о выборе оптимальной траектории самолета (см. пп. 9, 10 теоретической части) по данным, полученным у преподавателя.

6. Решить задачу в соответствии с динамической моделью задачи достижения цели (см. пп. 7, 8 теоретической части).

7. Проанализировать процесс решения. Построить графическое изображение траектории движения самолета по аналогии с рис. 3.

8. Ввести условие задачи управления запасами по своему варианту к заданию 5 курсового проекта (см. пп. 11 - 13 теоретической части) и, решив ее, сравнить результат с полученным вручную.

***Содержание отчета.***

1. Цель работы.

2. Условие задачи о ранце по своему варианту с числовыми данными.

3. Динамическая модель задачи о ранце (привести рекуррентные соотношения для каждого шага).

4. Результаты расчетов по шагам динамического процесса (только данные, необходимые для построения оптимального решения) и оптимальное решение.

5. Сравнительная характеристика разных методов решения ЗЦЛП.

6. Условие задачи о выборе оптимальной траектории самолета (в графическом виде) с числовыми данными.

7. Результаты расчетов по шагам динамического процесса и оптимальное решение (в графическом виде).

8. Условие и исходные данные для задачи управления запасами.

9. Результаты расчетов по шагам динамического процесса и оптимальное решение.

10. Выводы по работе.

***<u>Контрольные вопросы.</u>***

1. Что определяет понятие «динамическое программирование»?

2. Какие задачи можно решать, используя принципы ДП?

3. Сформулировать принцип оптимальности Беллмана.

4. Что такое рекуррентное соотношение?

5. Что понимается под уравнением состояния?

6. При каких условиях ЗЦЛП может быть решена методом ДП?

7. Что понимается под состоянием системы и под управлением в задаче о ранце?

8. Что понимается под состоянием системы и под управлением в задаче достижения цели?

9. Что понимается под состоянием системы и под управлением в задаче о выборе траектории?

10. Что понимается под состоянием системы и под управлением в задаче управления запасами?